OFPPT

ROYAUME DU MAROC

مكتب التكوين المهني وإنعاش الشغل

Office de la Formation Professionnelle et de la Promotion du Travail

DIRECTION RECHERCHE ET INGENIERIE DE FORMATION

VERSION EXPERIMENTALE

RESUME THEORIQUE
&
GUIDE DE TRAVAUX PRATIQUES

MODULE 06	CONNAISSANCE DES MATHEMATIQUES

Secteur : **BTP**

Spécialité : **Chef de chantier Travaux Publics**

Niveau : **Technicien**

(APC) Juin.2007

REMERCIEMENTS

La DRIF remercie les personnes qui ont contribué à l'élaboration du présent document.

Pour la supervision :

M. Khalid BAROUTI	Chef projet BTP
Mme Najat IGGOUT	Directeur du CDC BTP
M. Abdelaziz EL ADAOUI	Chef de Pôle CDC /BTP

Pour la conception :

M. TSVETANOV PAVEL	CDC/ BTP

Pour la validation :

M. TSVETANOV PAVEL	CDC/ BTP

Les utilisateurs de ce document sont invités à communiquer à la DRIF toutes les remarques et suggestions afin de les prendre en considération pour l'enrichissement et l'amélioration de ce programme.

DRIF

SOMMAIRE

Durée : 60H   60%: théorique
                          40%: pratique

**OBJECTIF OPERATIONNEL DE PREMIER NIVEAU
DE COMPORTEMENT**

COMPORTEMENT ATTENDU

Pour démontrer sa compétence, le stagiaire doit entretenir les espaces verts, selon les conditions, les critères et les précisions qui suivent

CONDITIONS D'EVALUATION

- Individuellement
- A partir des questions de cours
- Ecrire.
- Exercices.

CRITERES GENERAUX DE PERFORMANCE

- Bonne connaissance de mathématique
- Respect de formules et raisonnement
- Bonne connaissance de la géométrie
- Bonne connaissance des méthodes de tracés géométriques.

OBJECTIF OPERATIONNEL DE PREMIER NIVEAU DE COMPORTEMENT

PRECISION SUR LE COMPORTEMENT ATTENDU	CRITERES PARTICULIERS DE PERFORMANCE
A- Connaître le calcul vectoriel	• Notions de vecteur • Produit scalaire de deux vecteurs • Produit vectoriel de deux vecteurs
B - Avoir des connaissances de base sur les théories mathématiques de la droite et du plan.	• Théorèmes de la droite. • Relations métriques dans le plan. • Calculs des surfaces par les intégrales.
C- Etudier correctement les fonctions usuelles.	• Etude correcte des différentes fonctions usuelles : - fonction avec puissance - fonction exponentielle - fonction logarithmique - fonction trigonométrique
D- Savoir correctement le calcul matriciel	• Connaissance pour une matrice : - son déterminant - son rang - son inverse
E - Connaître les systèmes des équations linéaires	• Résolution exacte des systèmes des équations linéaires : - à deux inconnues - à plus de deux inconnues
F - Résoudre parfaitement les équations différentielles.	• Connaissance des principes de résolution des équations différentielles du : - du premier ordre. - du second ordre.

OBJECTIFS OPERATIONNELS DE SECOND NIVEAU

LE STAGIAIRE DOIT MAITRISER LES SAVOIRS, SAVOIR-FAIRE, SAVOIR-PERCEVOIR OU SAVOIR-ETRE JUGES PREA LABLES AUX APPRENTISSAGES DIRECTEMENT REQUIS POUR L'ATTEINTE DE L'OBJECTIF DE PREMIER NIVEAU, TELS QUE :

Avant d'apprendre à connaître le calcul vectoriel (A) :

1. Connaître parfaitement les notions de vecteur
2. Réaliser correctement le produit scalaire de deux vecteurs
3. Réaliser correctement le produit vectoriel de deux vecteurs
4. Calcul exactement la dérivée d'un vecteur

Avant d'apprendre à avoir des connaissances de base sur les théories mathématiques de la droite et du plan (B) :

5. Résoudre correctement des problèmes pratiques de mathématiques appliqués à la droite.
6. Résoudre des problèmes pratiques de mathématiques appliqués au plan.
7. Calculer des volumes par la méthode des intégrales

Avant d'apprendre à étudier correctement les fonctions usuelles (C) :

8. Faire l'étude correcte des fonctions avec puissance
9. Etudier parfaitement les fonctions exponentielles.
10. Faire l'étude correcte des fonctions logarithmiques
11. Etudier parfaitement les fonctions trigonométriques.

Avant d'apprendre à savoir correctement le calcul matricielle (D) :

12. Déterminer correctement une matrice
13. Calculer parfaitement le rang d'une matrice
14. Déterminer correctement l'inverse d'une matrice

Avant d'apprendre à connaître les systèmes des équations linéaires (E)

15. Résoudre parfaitement les systèmes des équations linéaires à deux inconnues.
16. Résoudre convenablement les systèmes des équations linéaires à plus de deux inconnues.

Avant d'apprendre à résoudre parfaitement les équations différentielles (F)

17. Résoudre parfaitement les équations différentielles du premier ordre.
18. Résoudre parfaitement les équations différentielles du second ordre.

PRESENTATION DU MODULE

A titre indicatif :

Cette présentation doit :

- Situer le par rapport au programme de formation ;
- Donner une description sommaire des grandes étapes de déroutement des actives d'apprentissage concernant la compétence visée par le module ;
- *Préciser la durée du module et es volumes horaires alloués aux parties théorique et pratique.*

MODULE N°:06

CONNAISSENCE DES MATHÉMATIQUES

RESUME DE THEORIE

Le contenu du résumé théorique doit couvrir l'ensemble des objectifs visés par la compétence relative au module en question en développant :

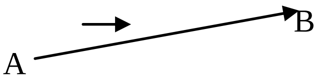
- Des concepts théorique de base (Définition, Schémas illustratifs, démonstrations d'application…..) ;
- Des exercices d'application ;
- Des évaluations (Contrôles continus).

A. CALCUL VECTORIEL

1. Notion de vecteur

1.1 Définition:

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et un segment de droite [A, B], orient qui a les caractéristique suivantes :



- Origine : c'est le point A
- direction : c'est la droite AB
- sens : de A vers B
- Module : c'est la mesure du segment AB ; Un module est un scalaire positif

Le vecteur $\vec{U}$ est un vecteur directeur port par le vecteur $\overrightarrow{AB}$

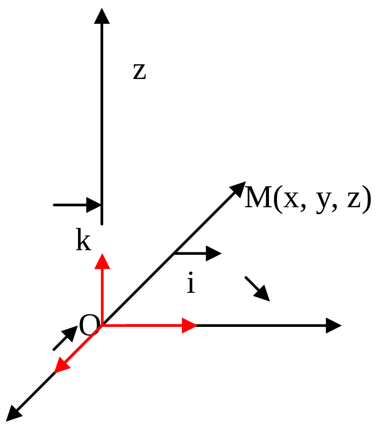
$$\vec{U} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

1.2 Composantes d'un vecteur OM dans un repère orthonormé

- Soit un repère orthonormé (o, x, y, z) lié à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- (x, y, z) sont les cordonnés du point M
- $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ et $z\vec{k}$ sont les projections du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur les axes du repère



OPÉRATION SUR LES VECTEURS

1.3 Somme de deux vecteurs

La somme de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est un vecteur $\vec{V_3}$ tel que :

soit $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}\}$ $\longrightarrow$ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1+x_2)\,\vec{i} + (y_1+y_2)\,\vec{j} + (z_1+z_2)\,\vec{k}$

$v_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k\}$ $\qquad \vec{v}_3 = (x_1+x_2)\vec{i} + (y_1+y_2)\vec{j} + (z_1+z_2)\vec{k}$

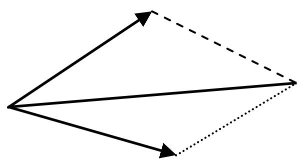
$v_3 = x_3 i + y_3 j + z_3 k$

En effet :

Soient v1 et v2 deux vecteurs du même origine. Et faisant entre eux angle x

$|v_1+v_2|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + 2|v_1|\,|v_2| \text{Cos } x$

$$/\!/\; V_3^2 = V_1^2 + v_2^2 + 2v_1 \cdot v_2 \text{ Cos } x \;/\!/$$



2. Produit scalaire de vecteurs

a) Définition

Le produit scalaire est un scalaire tel que :

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|\cdot\|\vec{V_2}\|\cdot \text{Cos } x.$$

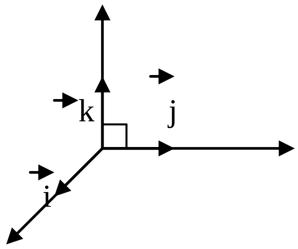
X étant l'angle formé par les deux vecteurs V_1 et V_2

b) Expression analytique du produit scalaire.

Soient $\vec{v_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

$\vec{V_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

$\vec{V_1}.\vec{V_2} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})$



$\vec{V_2}.\vec{v_2} = x_1.x_2\vec{i}.\vec{i} + x_1y_2\vec{i}.\vec{j} + x_1z_2\vec{i}.\vec{k}$
$+ y_1x_2\vec{j}.\vec{i} + y_1y_2\vec{j}.\vec{j} + y_1z_2\vec{j}.\vec{k}$
$+ z_1x_2\vec{k}.\vec{j} + z_1y_2\vec{k}.\vec{j} + z_1z_2\ \vec{k}.\vec{k}$

Or: $\vec{i}.\vec{i} = \|\vec{i}\|.\|\vec{i}\|.\text{Cos } \vec{} = 1x1x1 = 1$

$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

$\vec{i}.\vec{j} = \|\vec{i}\| . \|\vec{j}\|.\text{Cos } \pi/2$
$= 1x\ 1x\ 0 = 0$

de même pour : $\vec{j}.\vec{i} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$

D'où : $\boxed{\vec{V_1}.\vec{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_1}$

3. Produit vectoriel de deux vecteurs

a) Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ est u n vecteur $\vec{w}$; $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ faisant entre eux un angle x.

$$\boxed{\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \vec{w}}$$

Tel que :

- $\|\ \vec{w}\| = \|\vec{vd_1}\|.\|\vec{v_2}\|.$ Sin x
- Le vecteur $\vec{w}$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{v_1}$ et à $\vec{v_2}$ (au plan forme par les deux vecteurs $\vec{v_1}$et $\vec{v_2}$)
- Le trièdre formé par les trois vecteurs ($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{w}$) est un trièdre droit.

3.1 Expression analytique du produit vectoriel

-Soit un repère orthonormé (o, x, y, z) lié à une base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

- $\vec{v_1} = x_{1i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$

- $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$
- $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = x_1x_2\vec{i} \wedge \vec{i} + x_1y_2\vec{i} \wedge \vec{j} + x_1z_2\vec{i} \wedge \vec{k}$

$+y_1x_2\vec{j} \wedge \vec{i} + y_1y_2\vec{j} \wedge \vec{y} + y_1z_2\vec{j} \wedge \vec{k}$

$+z_1x_2\vec{k} \wedge \vec{i} + z_1y_2\vec{k} \wedge \vec{j} + z_1z_2\vec{k} \wedge \vec{k}$

Or: $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} = 0$

$\vec{I} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{k}$

$\vec{J} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$

$\vec{K} \wedge \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

$\vec{V}_1\ \vec{v}_2 = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{i}$

$$\boxed{\vec{V}_1\ \vec{v}_2 = (y_1z_2 - z_1y_2)\ \vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + x_1y_2 - y_1x_2)\vec{i}}$$

3.2 Méthode pratique

$$\vec{v}\ 1 \wedge \vec{v}2 \quad \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array} \right| = (y,z2 - z1y2)\vec{i} + (z1x2 - x1z2)\vec{j} + (x1y2 - y1x2)\vec{k}$$

4. Dérivée d'une fonction vectorielle.

La dérivée d'une fonction vectorielle et une fonction vectorielle.

Soit v (t) =xi +y (t) +z (t) k

V (t) =x (t) i +y (t) +y (t) j+ z (t) k

4.1 Application

Soit le vecteur OM= (3t2+4t) i +6tj +2k

Calcule le vecteur v =OM

V= (6T+4) i+6j)

-Exercices d'application

Soient deux vecteurs $\vec{x}$ =3i+2$\vec{j}$+4ketv2=2i+2j+3k calculer

1- Calculer $\|v_1\|$ et $\|v_2\|$

2- Calculer le vecteur S= v_1+v_2 et $\|s\|$

3- Calculer le produit scalaire v_1 x v_2

4- Déduire l'angle formé entre v_1 et v_2

5- Calculer le produit vectoriel $v_1 \wedge v_2$

1. || v 1 || = $\sqrt{}$

$\sqrt{3^2+2^2+4^2} = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29} = 5,38$

$||v2|| = \sqrt{2^2+2^2+3^2} = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17} = 4, 12$

2. S= v1 +v2 =5i+4j+7k

$||S|| = \sqrt{25 +16 +49} = \sqrt{90} = 9, 48$

3. v 1 x v2 =(3x2) +(2x2) + (4x3) =6+4 +12 =22
4. v 1 x v2 =||v1|| x ||v2|| x cos x

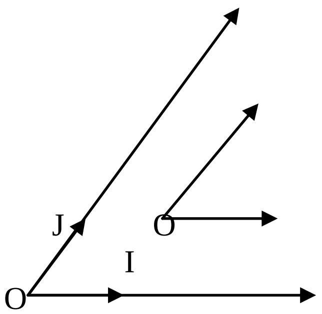
$$\cos x = \frac{v1 .v2}{||v1||.||v2||} = \frac{22}{5, 38 \times 4, 12} = 0,9925$$

x = Arc Cos (0, 9925) ≈ 7°

B .GEOMETRIQUE ANALYTIQUE PLANE

5. Les droites

5.1 Changement de repère



a) Changement d'origine

Considérons un repère (o, i, j) et un point o' de coordonnées (n_0, y_0) dans ce repère.

Désignons par (x,y) et (x',y') les coordonnées du point M dans les repères (o,i,y) et (o',i',y')

De OM = OO+OM nous déduisons

$Xi +yj = (x_0+x') i + (y_0 +y) j$

D'où les formules

$$\boxed{\begin{array}{l} X = x_0+x' \\ Y = y_0 +y' \end{array}}$$

b) Changement de repère

le problème générât du changement de repère M'énonce : in point Ma pour coordonnées (x,y) dans un repère (o,i,j) et (x',y') dans un repère((o',i',j').

Connaissant les coordonnées de o', i', j' dans le repère (o,i,j) Exprimer x et y en fonction de x', y'

5. 2 Exercice d'application :

Le repère (o',i',j') est défini dans le repère (o,i,y) par o'(2,-3) , i (3,-2) et j (5,1).

2- quelle est dans ce repère l'équation de la droite D l'équation X+2Y +4=0 dans le repère (o, i, y).

Solution:

1- on a : OM = OO+ O.M

Sn_1: xi +yj = 2i-3j+xi +y j = 2i –3j +x (3i-2j) +y (5i+j) = (2+3x'+5y') i+ (-3-2x'+y) j

D'où les formules de changement de repère

$$\boxed{\begin{array}{l} X = 2+3x'+5y' \\ Y = -3-2x'+u \end{array}}$$

Remplaçons x et y par ces expressions dans l'équations de D par rapport à (o, i, y)
2+3x'+y' +2(-302x'+y) +4=0
soit : -x'+7y' =0
Une équations Dans le repère (o', i', j') est donc :

$$\boxed{-x' +7y' =0}$$

5. 3 Équation de droites

Il est nécessaire de Savoir écrire sans calculs inutiles de équations de droites vérifiant des conditions données et de savoir construire rapidement une droite connaissant une de ses représentations Rappelons les principaux résultats , le plan étant rapporté à un quel campe

A/ **Représentations paramétrique**.

On commence par écrire les coordonnées du vecteur OM en fonction des données et d'un paramètre a

- **Droite définie par un point (x°,y°) et un vecteur u (a, b)**

AM= AU ⇔ OM + OA +AU ⇔ $\boxed{\begin{array}{l} X = x_0+7a \\ Y = y_0+Ab \end{array}}$

- Droite définie par deux points A(x_0, y_0) et B (x1 ,y 1)

AM + Ab ⇔ OM = (1-a) OA +a OB ⇔ $\boxed{\begin{array}{l} X + (1-a)\ x_0 +Ax1 \\ Y = (1-a)\ y_0 +a\ y1 \end{array}}$

Ces relations expriment que M est le barycentre des points A et B affectés des coefficients (1-7) et a.
Remarque : une droite admet une infinité de représentation paramétrique distincte, par exemple, le système : {x= (1-a) x_0 +ax1 } y = (1-a)y_0 +ay1
avec A 52,5 ° ET B (1,-2) M est donc le barycentre des points A et B affectés des coefficients 1 et a ; lorsque a marie M décrit la droite (A,B) , à l'exception du point B
Le système { x= 2+m
Y =5+7m Correspond à la relation OM + OA +u BA
Représente la même droite

B **– Équations cartésiennes**

Rappelons qu'une équation cartésienne d'une droite D exprime une relation nécessaire et surfaisante entre les coordonnées x et y d'un point M pour que ce point appartienne à D
Une droite a une infinité d'équation cartésiennes obtenus en multipliant les deux membres de l'une d'elles par réel nom nul et tout équation : ax +by +c=0 avec (a, b) ≠ (0,0) représente une droite donc un vecteur directeur est v (b,a)

- **Droite passant par A(x0,y0) de vecteur directeur u (a, b) :**

M (x,y) E D⇔AM ET U sont colin2aires⇔

B (x-x_0) –a(y-y_0) =0

$$\boxed{Bx-ay =bx0-ay0}$$

En particulier :

Si U +i Y + y_0

Si U +J X+ X_0

Pour une droite non parallèle à y'o y' on peut utiliser U (1,m) et A(o,p) ,l'équation devient :

$$Y = m X + p$$

M est coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine de D

- Droite passant par (x_0, y_0) et B(x1, y1)

Prendre U= AB $\Rightarrow$ (y_1-y_0) (x-x_0) –(y-y_0)=0

Si x1 $\neq$ x_0 et y_1 $\neq$ l' équation s'écrit aussi :

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{Y_1-Y_0}$$

Exemple :

Déterminer une équation de la médiane (AM) du triangle ABC avec A (1,2) ,B (6,5) et C (2,3).

M est le point de Cordonnées $\left(\frac{6+3}{2}, \frac{5+3}{2}\right)$ =(4,4)

a pour équation

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} \quad \text{ou} \quad \boxed{2x-3y+4=0}$$

- Cas particulier : une équation D coupant les axes en A (a, 0) et B (o, b) avec a $\neq$ 0 et b $\neq$ 0 est :

$$\frac{X}{A} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

<u>5. 4 Positions relatives de deux droites</u>

a) Droites d'équation y=mx+p

y =m'x +p' sont

•Les droites d'équation

Parallèles si et seulement si $\boxed{m=m'}$

si de plus , p=p' elles coïncident .

- Les droites d'équations ax +by+c=0

a'x+b'y+c '=0

Parallèles si et seulement si les vecteurs directeurs (b,-a) et (b',-a') sent colinéaires, d'où la condition

$$\boxed{Ab' – ba'=0}$$

Il existe alors un réel K te que a' =Ka', b' =Kb ; si de plus c' =Kc les droites coïncident.
. En particulier la parallèle à D d'équation ax + by +c =0 passant par 0 a pour équation $\boxed{ax + by = 0}$

Cette équation exprime aussi que le vecteur $\vec{OM}$ (x, y) appartient à la droite vectorielle $\vec{D}$ associée à D.
Application : le vecteur $\vec{U}$ (x,B) est un vecteur directeur de D si et seulement si :

UЄD⇔a& +Bb =0

Exemple :
Déterminer m pour que le vecteur u (m, 1,3) soit un vecteur de la droite D d'équation
2x-5y+6=0
Solution :

Il faut que : 2 (m+1)-5*3=0 ou :m=$\frac{13}{2}$

b) Droites concourantes

▪ Les droites d'équations $\begin{cases} y = mx + p \\ y = m'x + p' \end{cases}$ sont

Concourantes si et seulement si : $m \neq m'$

▪ Les droites d'équations $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ sont

Concourantes si et seulement si : $ab' - ab' \neq 0$

Remarque :
Les coordonnées du point d'intersection sont les solutions du système formé par les équations de deux droites.
C) Exercice
Inter-preter graphiquement le système :

$$\begin{cases} 8x - 5y + 2 \geq 0 \\ -2x + 3y - 4 \geq 0 \end{cases}$$

Solution :

$$\begin{cases} y \leq \frac{8x+2}{5} \\ y \geq \frac{2x+4}{3} \end{cases}$$

Un point de la droite D d'équation 8x-5y+2 =0

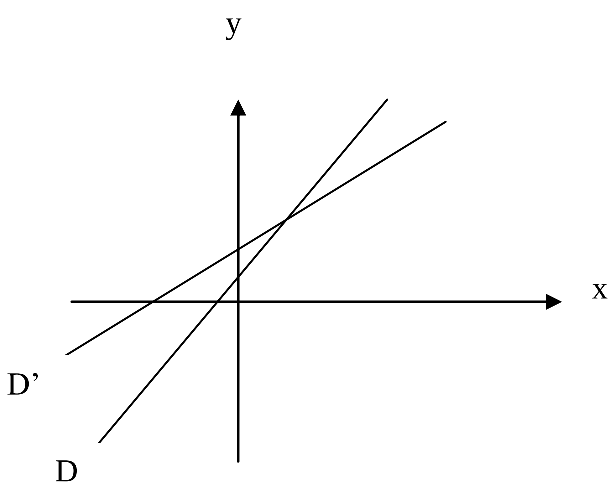
A pour coordonnées $\left(x, \frac{8x+2}{5} \right)$

Un point de la droite D' d'équation -2x+3y-4=0

A pour coordonnées $\left(x, \frac{2x+4}{3} \right)$

Les deux droites sont sécantes eu I (1,2).
Soit M(x, y) Un quel conque du plan.
(x, y) est solution de (1)⇔{ M au dessous de D
{M au dessous de D'

L'en semble des points M sont les coordonnées (x, y) sont solutions de (1) est représenté eu hachuré sur la figure.

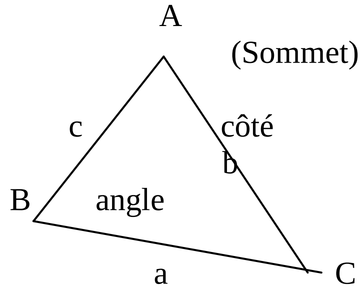


6. Les Relations métrique dans le triangle

6. 1 Rappel sur les triangles

Triangles

a/ Définition.



Dans tout triangle, distingue :

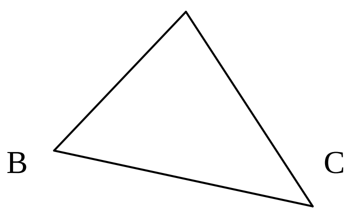
- trois sommets : A, B, C
- trois côtés : AB, BC, AC de longueur respective c, a, b.
- trois angles :

b) Différentes sortes de triangles.

Il existe 4 sortes de triangles :

- Le triangle scalène (quelconque)
- Le triangle isocèle.
- Le triangle équilatéral
- Le triangle rectangle.

1°/ Triangles scalène : c'est un triangle qui possède 3 côtés inégaux (triangle quelconque)

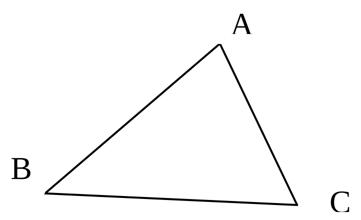


6. 2 : Droite remarquables

Les droites remarquables d'un triangle sont :

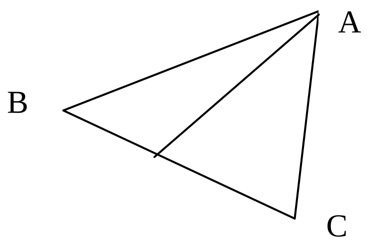
- La hauteur
- La médiane
- Ma médiatrice
- La bissectrice

a/ La hauteur : c'est une droite qui passe par l'un des sommets et perpendiculaire sur le côté opposé



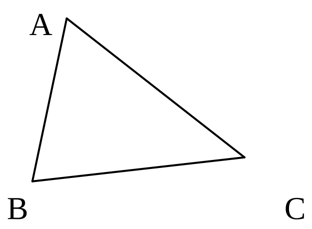
La hauteur AH relative
Au côtés BC
AH ⊥ BC

b / La médiane : c'est une droite joignant un sommet an milieu du côtés opposé



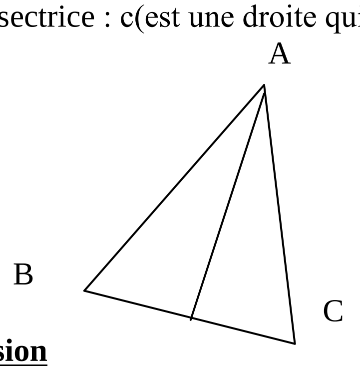
BM=MC

C/ La médiatrice : c'est une droite qui passe par le milieu d'un côtés et qui es —à ce côté



BM =MC
MD BC

D / La bissectrice : c(est une droite qui coupe l'un des angles en deux angles isométriques



Conclusion

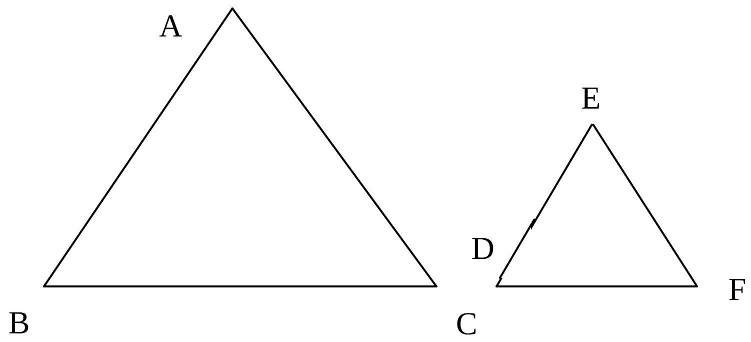
Un triangle a donc : 3 hauteurs, 3 médianes, 3 bissectrices et 3 médiatrices

- Le point d'intersection des hauteurs est appelé orthocentre
- Le point d'intersection des 3 médianes est centre de gravité.
- Le point d'intersection des 3 médiatrices est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
- Le point d'intersection des 3 bissectrices est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

6. 3 Relations métriques dans le triangle rectangle

Rappel sur le triangle semblable

Soit deux triangles quelconques ABC et EDF



Â=Ê
B=d
C=F

$$\frac{AB}{ED}=\frac{AC}{EF}=\frac{BC}{DF}=k$$

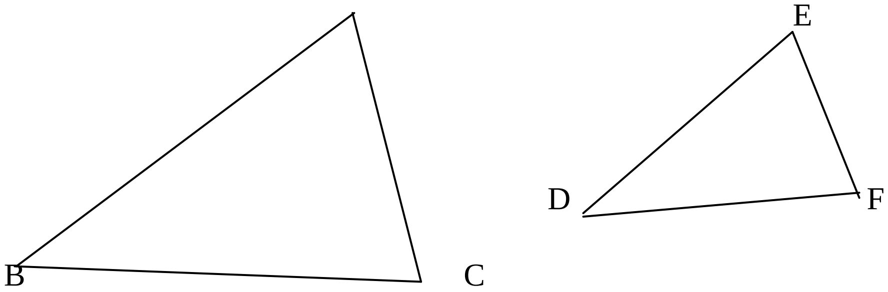
a / Définition

Deux triangles sont semblables si leurs angles sont respectivement isométriques si les mesures de leurs côtés homologues sont respectivement proportionnelles

B / Cas de similitude

1er Cas A

Nous avons



Â=Ê

B=D

Donc les triangles ABC et EDF sont Semblables et par conséquent C= F AB = AC = BC = k

Th : Si deux angles du triangle DEF sont respectivement isométriques à 2 angles du triangle ABC, alors ces 2 triangles sont semblables

2éme Cas A E

Nous avons : Â =Ê et $\frac{AB}{ED}=\frac{AC}{EF}$ donc les triangles ABC et EDF sont semblables et par conséquent :

{B=D et C=F

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{DF}$$

Th : si les menus des 2 côtés du triangle DEF sont respectivement proportionnelles aux mesures des deux côtés du triangle ABC. Et si les angles définis par ces côtés sont Isométriques, alors ces 2 triangles sont semblables.

3éme Cas

Nous avons : $\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{DF} = K$ donne les triangles ABC et EDF sont semblables et par

Conséquent : Â=Ê B=D; C=F

Th : si les mesures des 3 côtés du triangle DEF sont respectivement proportionnelles aux mesures des 3 côtés des triangles ABC, alors ces 2 triangles sont semblables

RELATIONS METRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

6.4 Relations métriques

Soit [A, H] La hauteur relative à l'hypoténuse [B, C] d'un triangle ABC Rectangle en A

Théorème fondamental

a) Les triangles ABH et ABC ont :

- Un angle commun : (BA, BH) B
- Un angle droit : (HA, HB) ;(AC, AB) H-A

Ils sont donc semblables d'après le 1er cas de similitude

b) Les triangles ACH et ABC ont :

- Un angle commun : (CA, HC) (AB, AC) H-A

Ils sont donc semblables d'après la 1ère similitude.

c) Les triangles ABC et ACH étant tous deux semblables au triangle ABC sont semblables entre eux.

Théorème : La hauteur d'un triangle relative à l'hypoténuse détermine dans ce triangle deux triangles semblables au premier et semblables entre eux.

Ecrivons Les rapports des côtés homologues des triangles semblables ABH et ABC ; ABH et A
Pour les triangles :

- ABH et ABC nous $\frac{AB}{CB} = \frac{BH}{AB} = \frac{AH}{CA}$ (1)

- ACH et ABC nous avons $\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} = \frac{AH}{BA}$ (2)

- ABH et ach nous avons $\frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{CH}$ (3)

Théorème I

Considérons la proportion formée par les deux premiers rapports de la ligne

$$(1)\quad \frac{AB}{CB} = \frac{BH}{AB} \Longrightarrow AB^2 = BC \times BH$$

De même considérons les deux premiers rapports de (2)

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC \times CH.$$

6.5 Relations trigonométriques dans un triangle quelconque

a) Relations entre les côtés et les angles

On considère un triangle quel conque ABC a, b, c étant les mesures refectives des côtés BC, AC, AB
Démontrons la relation : $\boxed{a^2=b^2=c^2\text{-}2bc\cos A}$

:

_Rap : produit scalaire de deux vecteurs AB .BC faisant entre eux un angle x

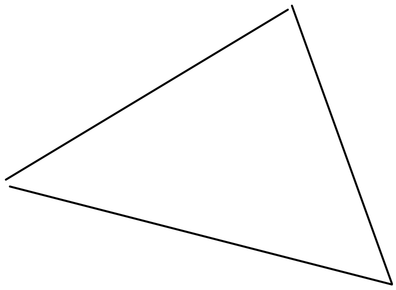
$\vec{AB} \times \vec{BC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{BC}\|$ CES X

$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ d'ou $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

$\vec{BC}^2 = \vec{BC} \times \vec{BC} = \|\vec{BC}\|$. $\vec{BC}$ CES 0

$= BC = a2$

$(\vec{AC} - \vec{AB})^2\ AC^2 - 2\vec{AC} \times \vec{AB} + \vec{AB} = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos A$



___$\Rightarrow$ $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}}$

De même : $\vec{AC} = \vec{ab} + \vec{bc} = \vec{AB} - \vec{CB}$

$\vec{AC}^2 = (\vec{ab} - \vec{cb})^2$

$B^2 = \vec{AB} - 2\vec{AB} \times \vec{CB} + \vec{CB}^2$

D'ou: $\boxed{b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos b}$

De même:

$\vec{BA} = \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{BC} - \vec{AC}$

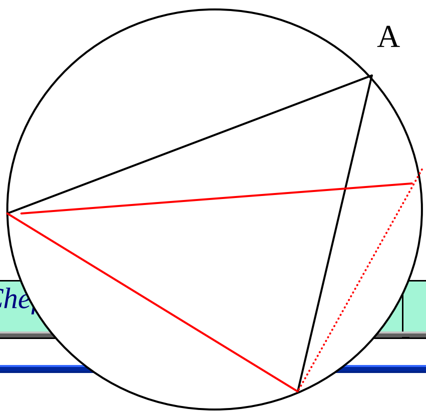
$\vec{BA}^2 = \vec{BC}^2 + \vec{AC}^2 - 1\vec{BC} \times \vec{AC}$

$= \vec{BC}^2 + \vec{AC}^2 - 2\vec{BC} \times \vec{AC} \times \cos C$

D'où: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos c}$

b) proportionnalité des côtés d'un triangle et sinus des angles opposée.

-A = Â' angles inscrits interceptant le même arc
- l'angle BCA' est inscrit dans un demi-cercle donc il est droit



sin Â = sin

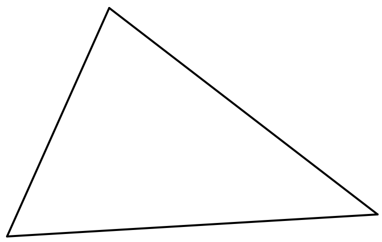
A' = $\frac{a}{2R}$ d'où 2R $\frac{a}{Sin\hat{A}}$ et de même

2R = $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ *AINSI*

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Thréonine : les côtés d'un triangle sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

c) Expression de l'aire d'un triangle
/ soit H la projection de B sur AC. Les angles A et BAH sont égaux.



sin Â = $\frac{h}{c}$ d'où h =c sin Â

par suite, l'aire du triangle ABC est

S = $\frac{1}{2}b.h = \frac{1}{2}$ b x c. sin Â

De même : S = $\frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

$$\sin C = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\sin C \Rightarrow S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

$$\sin B = \tfrac{h}{a} \Rightarrow h' = a\sin B \Rightarrow s\frac{1}{2}a.c\sin B$$

Ainsi : $s = \frac{1}{2}bc\sin \hat{A} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab.\sin C$

2/ Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC ;
r son rayon on a

aire BIC = $\frac{1}{2}$ a,r (1)

aire CIA = $\frac{1}{2}$ b,r (2)

aire Ai B = $\frac{1}{2}$ c,r (3)

Additionons (1) + (2)+(3)+(4)

S = $\frac{1}{2}$ r (a+b+c)

Or : a+b+c est le périmètre p du triangle.

d' où://S = $\frac{1}{2}$ p.r//

L'aire d'un triangle est égale au demi-produit du périmètre par le rayon du cercle inscrit dans le triangle.

7. Calcul d'aires par les intégrales

7-1 – Approche de la notion :

Soit la fonction, F : x∈[2,4] →3

Représente dans le repère orthonormé in contre.

Désignons par E l'ensemble des points du plan affine euclidien tels que :

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

A ce ensemble E on peut associer le réel A(E)= α , aire de l'ensemble E_4

Remarquons que : $\int 7(x).dx = 6$

7-2- Fonction positive

Si une fonction 7 est intégrable sur [a, b] et positive sur cet intervalle, l'ensemble des points M (x), du plan euclidien rapporté à

$a \leq x \leq b$

$0 \leq y \leq f(x)$

est quarrable et A (E)= $\int_a^b f'(x)._{dx}$

7-3- Remarque.

Soit une fonction intégrable sur [a,b] et négative sur E [a,b] ,F (x) ≤ 0 d'où $\forall x \in [a,b] - F(x) \geq 0$

Désignons par E l'ensemble des points M(x,y) du plan affine euclidien tels que :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq -F(x) \end{cases}$$

et par E l'ensemble des points M' (x,y) du plan affine euclidien tels que :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ F(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Les ensembles E et E' étant isométriques, puis que E est quarrable,E' est quarrable et A(E).

Or A (E) $\int_a^b - F(x) d_x$

et

$$\int_a^b -F(x)dx = -\int_a^b F(x).dx$$

D'où $a\int^b F(x).dx = -A(E)$

En conséquence, le réel $\int_a^b F(x).dx$ est négatif, il est apporté aire algébrique de l'ensemble E' l'aire de E' est

$$\left| a\int^b F(x).dx \right|$$

7-4- Application

Soit la fonction F représentée ci- contre dans le plan affin euclidien rapporté à un repère orthonormé.
Désignons par E l'ensemble des points M(x,y) de la région hachurée

L'aire algébrique E est $a\int^b F(x).dx$

L'aire A (E) est égale :

$$\left|\int_a^c F(x).dx \right| + \left|\int_a^b F(x).dx \right|$$

Exercice d'application :

Dans le plan rapporté à repère orthonormé, Soit C la courbe représentative de la fonction :

F : x → x^2

Déterminer tels que :

$$\begin{cases} -a \le x \le a \\ 0 \le y \le F(x) \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

7-5- Remarque :

Soit deux fonction F et g intégrables sur [a,b] telles que : $\forall x \in [a,b], F(x) \le g(x)$

Les représentations graphiques de ces deux fonctions étant données dans le plan affin euclidien rapporté à un repère orthonormé, l'aire du domaine plan limité par les courbes d'équation
Y =F (x) et y' =g(x) ainsi que par les droites d'équations x =a et x=b est :

$$A(E) = \int_a^b [g(x) - F(x).dx$$

Exercice d'application

Dans le plan affin euclidien rapporte à un repère orthonormé, déterminer l'aire du domaine. Plan défini par les deux courbes d'équations respectives :
Y =-x2-x+2 et y=2x+2
Elles droites d'équations :
X=-3 et x=0

$$A = \int_{-3}^0 [(-x^2 - x + 2) - (2x+2)]dx$$

$$A = \int_{-3}^0 (-x^2 - 3x)dx$$

$$A = \left[-\frac{x^2}{3}\right]_{-3}^0 - 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^0$$

A=

$9-\frac{27}{2}=-\frac{9}{2}$

C- ETUDE DES FONCTIONS USUELLES

8- Etude de la fonction puissance x^n

Soit la fonction F (x) =xn pour E N
- Si n est pair i $(-n)^n$ donc la fonction est pair
- Si n est pair i $(-x)^n$ =-xn donc la fonction est impair
- Etudions la fonction x^n, pour $x \geq 0$.

Elle est continue pour toute valeur de x car c'est une puissance positive entière de la fonction x qui est continue.

- Soit x' et x'' deux valeurs distinctes de la variable on a : $\frac{x''^n - x'^n}{x' - x''}$ >0

Théorème.

La fonction x^n est strictement monotone, croissant pour $x \geq 0$, quand $x \to +\infty; x^n \to +\infty$

<u>- Courbe représentative de x^n</u>

Pour x=0, on a : x^n =0

a) Si n est pair, OY est un are de symétrie

b) Si n est pair i o est un centre de symétrie

<u>Exemple d'application</u>

Etudier la fonction F (x) =x^2

* F(x) = $(-x)^2$ =x^2 c'est une fonction paire $\Rightarrow$ symétrie par rapport à OY ?
* Lim x2 =0
  x→+

lim x2 =+ ∞
x→+ ∞

$\lim \frac{F(x)}{x} = \frac{\lim x2}{x + r^x} = \lim x = +\infty$

Branche paratolique de direction OY.

* F' (x) =2x>0 $\forall n > 0 \Rightarrow 0$ F croissante.
* Tableau de narration

X	0		+∞
(x^2)		+	
x^2	0	↗	+∞

* Courbe représentative

9. Fonction exponentielle de base.

9.1 Définition d'une fonction exponentielle de base

On appelle fonction exponentielle de base, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

9. 2 Notion :

La fonction exponentielle de base est symbolisée par « exp »

Exp =ex

$Y=e^x$ x =log y

$x \in R] \Rightarrow$ $y \in R^*$

9. 3 Remarque :

$\forall_1 \in R; \forall x_2 \in R$

a) $X_1 = x_2 \Leftrightarrow e^{x1} = e^{x2}$

$x^1 > x^2 \Leftrightarrow e^{x1} < e^{x2}$

b) $\forall x \in R; \log(e.^x) = x \log .eI_R$
$\forall X \in R^*.E^{\log x} = I_{R^*}$

D'où : e°= (Car log 1=0)
e^1= (Car log e=1)

c) $\forall a \in R, \forall b \in R, e^{'a=b)} = e^a.e^b$

d) $\forall a \in R, e$

9.4 Applications

1- R^2 sourde dans r, l'équation:

2- (E):$E^{2X}+3E^X-4+0$

On pose e^x =x

(E) : x^2+3^x=

$\Delta = 9+16 = 25$

$x_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$

$x^2 = \frac{-3-5}{2}$ = -4 (à éliminer)

$e^x>0$ $\nabla x \in R$.

$E^x = x_1 = 1 \Rightarrow x=0$

$S=\{0\}$

2- Résoudre dans R l'équation :

$4^{e-3x}-5^{e-x}+e^x=0$

$e^{3x}(4^{e-3x}-5^{e-x}+e^x)=0$

e4x-5e2x=0

on pose x=e2x

Δ =25-16=9

$x_1=\frac{5+3}{2}=4 \Rightarrow$ $2x_1$=log4 $\Rightarrow$ x_1=1,386

$x_2=\frac{5-3}{}=1$ $\Rightarrow$ $2x_2$=log x_1 $\Rightarrow$ x_2=0

9. 5 Étude de la fonction exponentielle de base.

1. la fonction ex est une toijection de (R,+)sur (R*,.).Elle est continue et strictement sur R.
2. Recherche des limites.

A/ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$

b/ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+}$

c/ $\boxed{\text{Lim } \frac{e^x}{x} = +\infty}$

o pose e^x =x

3. Tableau de narration de la fonction e^x

x	$-\infty$ $+\infty$
f'(x)=ex	
f(x)=ex	0 ↗

3. Représentation graphique

10. Étude de la fonction logarithme népérien

10.1 Définition de la fonction logarithme népérien

Rappel:

Toute fonction continue un intervalle I, admet des primitives cet intervalle.

10.2- Définition:

On appelle fonction logarithme népérien la primitive sur l'intervalle 0, de la fonction

$x+ \rightarrow \frac{1}{x}$ qui s'annule pour x=1

Notation :

∇ x$\in$R* . log = dt

10. 3 Conséquences:

∇ $x_1 \in$R . $\nabla X_2 \in$*R*

x_1

$=x_2 \Leftrightarrow \log x_1 = \log x_2$

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log x_1 < \log x_2$

Remarque :

Un réel négatif ou nul n'admet pas de logarithme népérien

10.4 Application :

a/ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :

f: $x \mapsto \log(2x-3)$

$2x-3>0 \Rightarrow x<3/2$

Df= $3/2,\infty$

B/ Résoudre dans R, l'équation

Log (2x-3)=logx.

$2x-3> \Rightarrow 2x>3 \Rightarrow x \in \; 3/2, +\infty$

et $x>0 \Rightarrow \quad x \in \; 0, +\infty$

- Df = $3/2, +\infty$

Log (2x-3)=logx$\Leftrightarrow$

2x-3=x

x=3

C/ Résoudre dans R, l'inéquation.

Log (2x-3>log(4-x)

$2x-3>0 \;\Rightarrow\; x \in \; 3/2,+\infty$

et

$4-x>0 \Rightarrow \quad -x>-4 \;\Rightarrow\; x<4.$

$\Rightarrow \quad x \in \; -\infty ,4$

D'où =3/2 ,4

Log (2x-3)>log (4-x)

2x-3>4-x

$3x>7 \Rightarrow x73$

S= 7/3,4

10.5 Propriété fondamentale : logarithme d'un produit.

$\boxed{\nabla a \in R \;; \nabla b \in R^* \quad ;\log ab = \log a + \log\; b.}$

10.6 Application

log (x-2)+log(x+3)=log6

log (x-2)(x+3)=6

$x^2+3x-2x-6=6$

$x^2+x-12=0$

$\Delta= 1+48=59$

$x_1=\dfrac{-1+7}{2}=3$

$x_2=\dfrac{-1+7}{}=-4$

la solution se trouve dans l'intervalle .

2, + ∞ d'où :

//=3//

Conséquence de la propriété fondamentale.

A/

$\nabla x \in R$, $\nabla B \in r$

B/ $\nabla a \in R^*$, $\nabla n \in Z$, $\boxed{\text{Log } a^n = n \log a}$

<u>10.7 Étude de la fonction logarithme népérien</u>

1) la fonction logarithme népérien est définie continue et dérivable sur l'intervalle 0,+∞ .

Sa dérivée est la fonction $x \to 1/x$, la fonction log est strictement croissante sur l'intervalle 0,+∞

Recherche des limites

A/ limite de log x quand x tend vers plus défini

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty}$$

$$\boxed{\text{b/ } \lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty}$$

On pourra pose x 1/x

C) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0^+$

3) Tableau de variation.

x	0	+∞
(logx)'=1/X		
log x	-∞ ↗	+∞

Remarque :

-Étude de la branche infinie.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log n}{x} = 0^+$$

D'où la courbe admet une branche paratoilique de direction asymptotique l'axe des abscisses

- $\lim_{x \to 0^+} \log = -\infty$

Représentation graphique

11. Fonction trigonométriques

11.1 Définition :

Soit une cercle trigonométrique de centre 0 muni d'une orthonormée de sens positif ($\overline{OA}$, $\overline{OB}$).

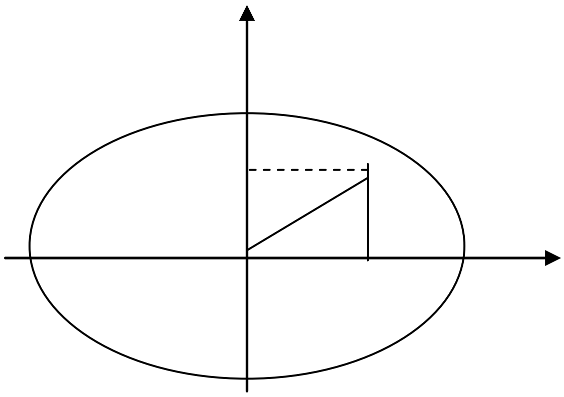


Figure 3-1 cercles trigonométriques

Si A est l'ensemble des angles ($\overline{OA}$, $\overline{OM}$) on définit la fonction O :

$R \rightarrow A$

$X \rightarrow 0(x) = (\overline{OA}, \overline{OM})$

La fonction sinus est définit comme suit :

$\text{Sin } R \rightarrow R$

$X \rightarrow \text{si } x$

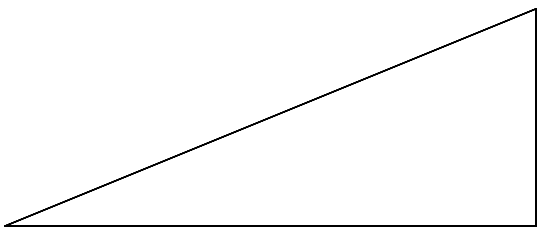
Avec sin x= Sin (x) =$\overline{OK}$

L a fonction cosinus est définit comme suit :

$\text{Cos} : R \rightarrow R$

$X \rightarrow \text{C os } x = \text{C os } (x) = \overline{OH}$

Conséquence :



$$\|\overline{OM}\|^2 = \|\overline{OH}\|^2 + \|\overline{OK}\|^2$$

$\nabla x\ 1 = \cos x^2 + (\sin x)^2$

- $\cos^2 x + \sin x = 1$
- $-\cos^2 x = \sin x.$
- $-\sin^2 x = \cos x$

11.2 Étude la fonction cosinus et la fonction sinus

cos : R $\rightarrow$[-1,+1]

x $\rightarrow$ cos x

a/ Domaine de défi nation

∇ xcos x : est définit $\Rightarrow$Df =R

$\Rightarrow$Cos est périodique de période 2π

∇x cos (x) = cos (x+2kπ) k$\in$Z

on peut donc limiter l'étude à[-π,+π]

∇ De plus ∇x$\in$R cos x = cos –x $\Rightarrow$cos est une fonction paire $\Rightarrow$l'axe (y'o y) est un axe de symétrie de la courbe et l'étude peut se limiter a [0,π].

b) limites

$\lim_{x\to 0}$ cos x =cos 0=1

$\lim_{x\to \pi}$ cosx=cos π=-1

c) Vérifier les sens de variations

$\Rightarrow$cos' –sin x sur [0,π].cos' x $\leq$0$\Rightarrow$cos décroissant.

$\Rightarrow$cos' x=0$\Rightarrow$-sin x=0$\Rightarrow$0 ou x=π.

Si x est voisin de 0 par valeur supérieure sin (x) >0$\Rightarrow$-sinus (x) <0

Si x est voisin de 0 par valeur inférieure –sin (x) >0.

X=0 est donc est un maximum de la courbe.

De même x =π est un minimum de la courbe.

Cherchons s'il existe un point d'inflexion.

Cos'' x =-sin' x=-cos x.

Cos'' x =0 –cos x=0$\Rightarrow$x=2

Au voisinage de π/2 cos change de signe $\Rightarrow$x=π/2est un point d'inflexion.

d) Tableau de variation

X	0	π /2	π
cos'x	0		-0
cos x	1	0	-1

Figure 3-2 courbes de la fonction cosinus

De même on représente la fonction sinus

11. 3 Étude de la fonction tangent

Définition :

On appelle la fonction tangente la fonction qui associe à tout nombre réel x le nombre $\frac{\sin x}{\cos x}$

Lorsqu’il existe.

On note tg x = $\frac{\text{sinx}}{\text{cosx}}$

Si on considère les deux triangle (OHM) et (OAT) ce deux triangle semblables donc

$\frac{OK}{OH} = \frac{AT}{OA} \Rightarrow \frac{SIN}{COS} = AT$ (OA =1) $\frac{hm}{OH} = \frac{AT}{OA}$ ou hm = OK

⇒tg x= AT si on considère l’axe (t’ AT) d’origine A on peut associer à chaque x sa tangente sur cet axe d’origine A.

Domaine de définition :

Tg est définie pour x tel que cos ≠0⇒x≠π/2+Kπ(k∈z)

Df =R ⎨π/2+kπ⎬k∉z.

On vérifier facilement que tg est périodique de période π

⇒∇x ∈Df

tg (-x) =$\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$ = $\frac{-\sin,x}{\cos x}$ =-tgx⇒ la fonction tg est une fonction impaire

⇒le pointr 0 centre de symétrie de la représentative .

L’etude peut donc se limiter à l’intervalle [0,π/32.

b) $\lim_{x \to 0}$ tg x=tg0=0

$\lim_{x \to \pi/2}$ tg x =-2 ⇒ x=π/2 asymptote de la coure .

C) (tg’x)= $\frac{\sin x' \cos -\cos' \sin}{\text{Cos } x}$

Tg x=$\frac{\cos x+\sin x}{\text{Cos } x}$ =$\frac{1}{\cos x}$ =1+tg^{2}x

Tg’x >0⇒tg est strictement là où elle est définie.

d) Tableau de variation

X	-π/2		0	
Tg’x		+		
Tg x	↗		0 ↗	+x

Figure 3-3 courbes de la tangent

11.4 Relations trigonométries

$\cos^2 x + sn^2 x = 1$
cosx =x—sin2x

$\cos(\pi/2-x)= \sin x$
$\sin(\pi/2-x)= \cos x$
$\cos(\pi/2+x)=-\sin x$
$\sin(\pi/2+X)=\cos x$
$\cos(\pi-2)=-\cos x$
$\sin(\pi-x)=\sin x$
$\cos(3\pi/2-x)=-\cos x$
$\sin(3\pi/2-X)=-\sin x$
$\cos(3\pi/2+X)=\sin x$
$\sin(3\pi/2+X)=-\cos x$
cos(a+b)=cosa.cosb-sina.sinb
sin(a+b)=sina.cosb+cosa.sinb
cos(a.cosb+sina.sinb
sin(a-b)=sina.sinb-cosa.cosb

EXERCICE D'APPLICATION
Simplifier ler expressions suivantes:
$S=\sin(\pi/2-a) + \cos(\pi+a)-\cos(a-\pi/2)+\sin(a-\pi)$
$S=2\sin(a+\pi) + \cos(a-\pi/2)-2\cos(a+\pi/2)-2\cos(a+\pi/2)+\sin(a-\pi)$
$S= \cos x + \cos(x+2\pi/3)+\cos(x+4\pi/3)$
Dériver les fonctions suivantes :
$Y=\cos 2x$
$Y=\sin^2 x$
$Y=\frac{-2x}{\text{Cos}3x}$
$Y=tgx^2$
$Y=tg^4(3x^2+1)$
$Y=e^{\cos 2x}$
$Y=\log(tgx+1)^2$
Construire les courbes :
$Y=\cos x+\sin x$
$Y=1+\sin x$

D. LES MATRICES

12. Les déterminants

Soit une matrice carrée d'ordre n :

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{im} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{matrix} \quad (1)$$

On appelle déterminant d'ordre n assorié à la matrice (1) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} & a_{2n} \\ \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nj} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

12.1 Propriétés des déterminants

Une matrice est dite transposée de la matrice 1, si ses lignes coïncident avec les colonnes correspondantes de la matrice (1) et inversement, autrement dit, la transposée de la matrice (1) est la matrice (2).

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{j1} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{j2} & a_{n2} \\ \\ a_{1i} & a_{2i} & a_{ji} & a_{ni} \\ \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{jn} & a_{nn} \end{matrix} \qquad (2)$$

De même le déterminant de la matrice transposée est de la forme :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{j1} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{j2} & a_{n2} \\ a_{1i} & a_{2i} & a_{ji} & a_{ni} \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{jn} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Propriété 1:</u>
Un déterminant coïncide avec son transposé.

<u>Propriété 2 :</u>
Un déterminant est nul si tous les élément d'une de ses lignes sont nuls (ou colonnes).

<u>Propriété 3</u> :
En échangeant deux lignes quelconques d'un d »terminant ce dernier change de signe.

<u>Propriété 4 :</u>
Un déterminant ayant deux lignes identiques est nul

<u>Propriété 5 :</u>
En multipliant par un nombre k tous les éléments d'une ligne quelconque d'un déterminant d'ordre n, on obtient un déterminant dont la vecteur est k multiplié par le déterminant initial.

<u>Propriété 6 :</u>
Si les éléments de deux lignes quelconque d'un déterminant sont proportionnels, alors ce déterminant est nul.

<u>Propriété 7 :</u>
Si l'une des lignes d'un déterminant d'ordre n est une combinaison linéaire des autres lignes, alors ce déterminant est nul.

<u>Propriété 8 :</u>
Un déterminant d'ordre n ne varie pas si l'on ajoute aux éléments de l'une de ses lignes les éléments correspondants d'une autre ligne multipliée par un même nombre.

<u>Exercice d'application.</u>

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & x & 5x \\ -2 & 2x & x \\ 3 & 4x & -x \end{vmatrix}$

Solution : $D = x^2$

$$D = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = x^2 \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & -16 \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 1 & -16 \end{vmatrix} = x^2\,(-64 - 11) = -75x^2$$

13. Rang d’une matrice.

13.1- Mineur d’un déterminant

Soit D un déterminant d’ordre n et k un nombre entier tel que : $n - 1 \geq k \geq 1$

Fixons k linges et k colonnes du déterminant D, les éléments qui appartiennent à l’une des k linges et à l’une des k colonnes choisies forment une matrice carrée d’ordre k.

Le déterminant de cette matrice est appelé mineur d’ordre k du déterminant D.
Soit M un mineur d’ordre k d’un déterminant D d’ordre n, en supprimant les lignes et les colonnes qui engendrent M, on obtient un mineur M’ d’ordre n-k est mineur complémentaire de M.

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1k} & a_{1,k+1} \ldots\ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2k} & a_{2,k+1} \ldots\ldots & a_{2n} \\
 & \vdots & M & & \\
a_{k,1} & a_{k,2} & a_{k,k} & a_{k,k+1} & a_{k,n} \\
a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} \ldots\ldots & a_{k+1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & M^{I} & \\
a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,k} & a_{n,k+1} & a_{nn}
\end{vmatrix}$$

Remarque :

Si tous les mineurs d'ordre k de la matrice A sont nuls, alors tous les mineurs d'ordre supérieur à k de cette matrice annulent également.

13.2- Rang d'une matrice.

-l'ordre le plus élevé des mineurs non nuls d'une matrice A est égal au rang de la matrice A.

- pour calculer le rang d'une matrice, il faut passer des mineurs d'ordre intérieur à ceux d'ordre plus élevé. Un mineur d'ordre k non nulle une fois trouvée il suffit de calculer les mineurs d'ordre k+1 contenant le mineur d. si tous ces mineurs d'ordre k+1 sont nul alors le rang de la matrice k est k.

Exemple.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

le mineur d'ordre 2, se trouvant à l'intersection des deux premières lignes et deux premières colonne de A est nul ,mais la matrice A posé de des mineurs d'ordre 2 non nul

Exemple : $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ le mineur d'ordre 3 qui contient d.

$$d' = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 13 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 + 13 \neq 0$$

d'' le mineur d'ordre 4 qui contient d'_1

$$d'_1 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} \quad ; \quad d''_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}$$

$d''_1 = 0$ $\qquad$ $d''_2 = 0$ $\qquad$ le rang de A et 3

14. Calcul de l'inverse d'une matrice.

14.1 Théorème :

Une matrice carrée A d'ordre n (nε1) est inversible si et seulement si déterminant de A est $\neq 0$

14.2 Matrice des cofacteurs.

Soit A= (aij) $1<i<n$, $1<j<n$ une matrice d'ordre n

On appelle matrice des cofacteurs associée la matrice A,la matrice C = (cij) ou $c_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ avec D_{ij} le déterminant de la matrice d'ordre (n-1) obtenu en supprimant dans Ala i^{ere} ligne et la j^{ere} colonne.

Théorème :
Si A est une matrice inversible alors

$$A\text{-}1= \boxed{\frac{1t_c}{\text{Det } A}}$$

où :

C'est la matrice des cofacteurs, associé à A, tc : transposée de C.
Exemple.
Déterminer la matrice inverse de A

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

det A= 8 donc la matrice A est inversible la matrice des cofacteurs associée à A est

$$C = \begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$C = \begin{vmatrix} -6 & -8 & 6 \\ 7 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$A^{-1} = \ 1/\det A \ \varepsilon\ C$

$$A^{-1} = 1/8 \begin{vmatrix} -6 & 7 & -2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

E. SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

15. Système de deux équations du 1ère des à deux inconnues

1/ Soit a, b, c, a', b', c' 6 réels donnés.
on considère le système $S : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

résolu par la méthode de Cramer :

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ le determinant principal du système.
$\Delta = ab' - a'b$

$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ le determinant relatif à l'inconnue x.
$\Delta x = cb' - c'b$

$\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$
le determinant relatif à l'inconnue y.

on rappelle que :

a/ si $\Delta \neq 0$ alors le système admet un couple (x, y) solution unique tel que : $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$

b/ si $\Delta = 0$ et l'un des deux autres déterminants Δx ou Δy est $\neq 0$, alors le système est incompatible (impossible) il n'admet pas de solution.

c/ si $\Delta = 0$, $\Delta x = 0$ et $\Delta y = 0$: le système est équivalent à l'une des équations. on calcule y en fonction de x ou x en fonction de y..

on obtient par exemple dans le 1er cas : si $b \neq 0$ $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$

l'ensemble de solutions du système sera :

$$S = \left\{ \left(x, \frac{-ax + c}{b}\right) / x \in \mathbb{R} \right\}.$$

2) Exemples

a/ $\begin{cases} 2x + 3y = 32 \\ 5x - 4y = -35 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -23 \quad ; \quad \Delta x \begin{vmatrix} 32 & 3 \\ -35 & -4 \end{vmatrix} = -23 \; ; \; \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 32 \\ 5 & 35 \end{vmatrix} = -23$$

$$x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{-23}{-23} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{-230}{-23} = 10$$

$$S = \{(1, 10)\}.$$

b/ $\begin{cases} 3x + 9y = 9 \\ 4x + 12y = 1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0$$

$$\Delta x \begin{vmatrix} 9 & 9 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 108 - 9 \neq 0$$

$\Delta = 0$ et $\Delta x \neq 0$ donc $S = \emptyset$.

c/ $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = -2 \end{cases}$ $\quad \Delta = 0$, $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$

$$S = \{(x, (2x - 1)) / x \in \mathbb{R}\}$$

16. Système de 3 équations à 3 inconnues

Considérons 12 réels $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d''$ et le système

Exemple.
Résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

$$S = \{(2, -3, -1)\}$$

16. 1 Système linéaire de équations à inconnues.

1- Définition.

a - Cas général

On appelle système linéaire de p équations à n inconnues, tout système d'équation de la forme :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pj}x_j \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Dans lequel a_{ij} et b_i $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$ sont des réels donnés, p et n désignent des entiers naturels

i désigne la ligne.

j désigne la colonne

Une solution de (S) est n-uplet $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant simultanément les p équations de (S).

b - Cas particulier

Un système est dit carré si $p = n$

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Le déterminant principal du système est $\Delta = \begin{vmatrix} \overset{+}{a} & \overset{-}{b} & \overset{+}{c} \\ -a' & b' & c' \\ +a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$

Son developpement est:

$$\Delta = a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - a'\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + a''\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a(b'c'' - b''c') - a'(bc'' - b''c) + a''(bc' - b'c).$$

- le determinant relatif à l'inconnue x est Δx.

$\Delta x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ qu'on peut développer d'une manière analogue.

- le déterminant relatif à l'inconnue y est Δy.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}$$

- Le déterminant relatif à l'inconnue z est Δz.

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

on distingue 3 cas:

1er Cas: si $\Delta \neq 0$ le système admet une solution unique dans $\mathbb{R}^3$; le triplet (x, y, z) telque:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \; ; \; y = \frac{\Delta y}{\Delta} \; ; \; z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

2ème Cas: si $\Delta = 0$ et l'un des trois déterminant non nul, le système est incompatible $S = \emptyset$

3ème cas: si $\Delta = 0$; $\Delta x = 0$; $\Delta y = 0$; $\Delta z = 0$

le système est réduit à deux équations.

Un système carré est dit triangulaire à diagonale unité si l'on a : $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ et $a_{ii} = 1$

Exemple :

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1 \\ 0 + \quad x_2 + a_{23} x_3 &= b_2 \\ x_3 &= b_3 . \end{aligned}$$

propriété

Un système triangulaire à diagonal unité admet, quelque soit le second membre une et une seule solution.

16.2. Représentation de la méthode de pi rot de GAURS

Lorsqu'il s'agit de résoudre un système à la main, toutes les méthodes se valent, la méthode de Pivot de GAUSS a sur les autres l'avantage d'être systématique cette méthode consiste à exécuter, dans un ordre précis et déterminé les opérations élémentaires sur les lignes d'un système conduisant à un système triangulaire à diagonale unité plus facile à résoudre

Exemple 1

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 0\,x_3 + 7x_4 = -10 \\ x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 + \frac{17}{2}x_4 = -12 \\ 3x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 4x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 15 \end{cases}$$

Tableau initial
$\boxed{2}$ 1 -2 3 4
2 -1 0 7 -10
1 3/2 1 17/2 -12
3 1/2 -4 -1/2 15

Etape 0

$L_1 \leftarrow L_1/2$	$L_2 \leftarrow L_2-2L_1$ $L_3 \leftarrow L_3-L_1$ $L_4 \leftarrow L_4-3L_1$
1 1/2 -1 3/2 2	1 1/2 -1 3/2 2
2 -1 0 7 -10	0 $\boxed{-2}$ 2 4 -14
1 3/2 1 17/2 -12	0 1 2 7 -14
3 ~~1/2~~ -4 -1/2 15	0 -1 -1 -5 9

Etape 1

$L_2 \leftarrow L_2/-2$	$L_3 \leftarrow L_3-L_2$ $L_4 \leftarrow L_4+L_2$
1 1/2 -1 3/2 2	1 1/2 -1 3/2 2
0 1 -1 -2 7	0 1 -1 -2 7
0 1 2 7 -14	0 0 $\boxed{3}$ 9 -21
0 -1 -1 -5 9	0 0 -2 -7 16

Etape 2

$L_3 \leftarrow L_3/3$	$L_4 \leftarrow L_4+2L_3$
1 1/2 -1 3/2 2	1 1/2 -1 3/2 2
0 1 -1 -2 7	0 1 -1 -2 7
0 0 1 3 -7	0 0 1 3 -7
0 0 -2 -7 16	0 0 0 $\boxed{-1}$ 2

Etape 3

$L_4 \leftarrow L_4/-1$
1 1/2 -1 3/2 2
0 1 -1 -2 7
0 0 1 3 -7
0 0 0 1 -2

Etape 4 (finale).

le système initial est équivalent au système suivant:

$$
\begin{aligned}
x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - x_3 + \tfrac{3}{2}x_4 &= 2 \\
x_2 - x_3 - 2x_4 &= 7 \\
x_3 + 3x_4 &= -7 \\
x_4 &= -2
\end{aligned}
$$

on obtient la solution en remontant dans les équation ce qui donne :

$x_4 = -2$; $x_3 = -1$; $x_2 = 2$; $x_1 = 3$

$$S = \{(3, 2, -1, -2)\}.$$

Définition

Pivot de rang i du système est le terme a_{ii} de la matrice obtenue à l'étape $i-1$.

Exemple 2.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 0x_3 + 7x_4 = -8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{2} & -2 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 7 & -8 \\ 3 & -2 & 4 & 8 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 6 & 20 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & -2 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 7 & -3 & 22 \end{array}$$

Pivot nul $\Rightarrow$ permutation de la 2^{e} ligne par la $3^{ème}$ ligne.

$$L_2 \longleftrightarrow L_3 \qquad\qquad L_2 \longleftarrow L_2/1$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -10 \\ 0 & -2 & 7 & -3 & 22 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 14 \end{array}$$

$$L_3 \longrightarrow L_3/-2$$
$$L_4 \longrightarrow L_4 + 2L_2$$

1	-1	2	3	2
0	1	-2	-1	-4
0	0	1	-2	5
0	0	0	1	-1

conduisant du système :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 &= -4 \\ x_3 - 2x_4 &= 5 \\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$$S = \{(0, 1, 3, -1)\}.$$

F. LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Rappels

Résoudre les équations différentielles suivantes

1 – $y' = 0$
y = constante = C

2 – $y'' = x \Rightarrow y' = \frac{x^2}{2} + C_1$
$y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$

3 – $y' = y \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow \operatorname{Ln}|y| = x + C$
$|y| = e^{x+C} \Rightarrow y = \pm e^{x+C}$
$y = \lambda e^{x}$.

4 – $y'' = 1 \Rightarrow y' = x + C$
$\Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + Cx + C'$

5 – $y'' = x^2 - x$
$\Rightarrow y' = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1$
$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$.

17. Résolution des équations différentielles linéaire du 1èr ordre.

17.1 Résolution de l'équation : y'- ay = 0

Remarques

1/ La fonction nulle vérifie l'équation différentielle $y' - ay = 0$

2/ si $a \neq 0$ $\frac{y'}{y} = a$ donc
$\operatorname{Ln}|y| = ax + C$
$|y| = e^{ax+C}$

on peut écrire $y = \pm e^{ax+C} = \pm e^{ax} \cdot e^{C}$

y est de la forme λe^{ax}

3- si $y = \lambda e^{ax}$ alors $y' = a\lambda e^{ax}$ et l'equation differentielle est vérifiée

L'équation differentielle $y' = ay$ admet une infinité de solutions toutes de la forme $y = \lambda e^{ax}$

Remarque :

Il existe une solution unique vérifiant l'équation differentielle $y' - ay = 0$ et la condition initiale $y(x_0) = y_0$, c'est la fonction $x \longrightarrow y_0 e^{a(x - x_0)}$.

En effet :

$$y = \lambda e^{ax}$$
$$y(x_0) = y_0 = \lambda e^{a x_0}$$
$$\lambda = y_0 e^{-a x_0}$$
$$y = y_0 e^{-a x_0} e^{ax}$$
$$\| y = y_0 e^{a(x - x_0)} \|$$

Exemple.

1) Résoudre dans IR.

$$y' = 5y$$
$$\frac{y'}{y} = 5 \Rightarrow \ln|y| = 5x + C$$
$$y = \pm e^{5x + C} = \lambda e^{5x} \quad \lambda \in IR.$$

2) Déterminer la fonction f verifiant :

$$f' + f = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 2$$
$$f = \lambda e^{ax}$$
$$f = \lambda e^{-x}$$
$$f = 2 e^{1-x}$$

17.2 Résolution de l'équation différentielle : y' – ay = b on détermine une fonction μ solution particulière de l'équation différentielle $y'-ay=b$ du type du 2^{me} membre c.a.d constante.

on aura : $\mu : x \longrightarrow c$

$-ac = b$

d'où $c = \frac{-b}{a}$

En conclusion il éxiste une fonction constante $\mu : x \longmapsto \frac{-b}{a}$ vérifiant l'équation diff $y'-ay=b$

Résolution : $y'-ay=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'-ay=b \\ \mu'-a\mu=b \end{cases}$

$$(y'-\mu')-a(y-\mu)=0$$
$$(y-\mu)'-a(y-\mu)=0$$
$$z'-az=0$$
$$z=\lambda e^{ax} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y-\mu=\lambda e^{ax}$$
$$y=\lambda e^{ax}+\mu$$
$$y=\lambda e^{ax}-\frac{b}{a}$$

Théorème:

Les fonctions $f(x)=\lambda e^{ax}-\frac{b}{a}$ sont les solutions différentielles de l'équation : $y'-ay=b$.

Exercice d'application (1)

$f(t)$ désigne le nombre de bactéries contenues dans un verre d'eau à l'instant t exprimé en secondes. La croissance de cette population de bactéries à tout instant est égale à la moitié du nombre de bactéries du même instant t

A l'instant t = 0, il y a un million de bacteries dans le verre. Combien y aura-t-il de bacteries dans le verre au bout de 4 s.

Solution :

f(t) désigne le nombre de bacteries contenues dans un verre d'eau à l'instant t.
comme la croissance de la population à l'instant t est égale à la moitié du nombre de bacterie
y vérifie l'E.D linéaire homogène $y' = \frac{y}{2}$
la solution générale λe^{at}.
on a la condition initiale $f(0) = 10^6$
$f(t_0) = y_0$

d'où $y = y_0 e^{a(t-t_0)}$
$y = 10^6 e^{t/2}$

à t = 4 s // $y = 10^6 e^2 \simeq 7,389.10^6$ //

Exercice d'application (2)

$y' - 3y = 2$
$y = \lambda e^{3x} - \frac{2}{3}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

17.3 Résolution de l'équation différentielle : y' – ay = gx

cette équation est linéaire et admet des solutions dans $\mathbb{R}$.
soit l'équation linéaire homogène associée à l'équation différentielle.

$y' - ay = 0$ (1)

la solution générale de l'équation homogène est
$y = \lambda e^{+ax}$

la solution générale de l'équation complete est obtenue en faisant varier la constante λ $(\lambda = \lambda(x))$ ou on donne une solution particulière y_0 du même type que le 2^{eme} membre et qui doit verifier l'équation differentielle et $Y = y + y_0$.

Exemple d'application :

Integrer l'équation differentielle.

$(E): y' + y = x^2 + 1$

l'équation homogène :

$EH: \quad y' + y = 0 \Rightarrow \quad y = \lambda e^{-x}$

la solution générale de l'équation complète en faisant varier la constante λ.

$$y = \lambda(x) e^{-x}.$$

$$y' = \lambda'(x) e^{-x} + \lambda(x).(-e^{-x})$$

$$y + y' = \lambda e^{-x} + \lambda'(x) e^{-x} - \lambda(x) e^{-x} = x^2 + 1$$

$$= \lambda'(x) e^{-x} = x^2 + 1$$

$$\lambda' = (x^2+1).e^{x}.$$

$$\lambda = \int (x^2+1) e^{x}.$$

on fait une intégration par partie.

$u = x^2 + 1 \qquad v = e^{x}$

$u' = 2x.dx \qquad v' = e^{x}.dx.$

par suite : $\lambda = (x^2+1)e^{x} - 2\left[x e^{x} - \int e^{x}.dx\right]$

$$A = (x^2+1)e^{x} - 2x e^{x} + 2e^{x} + C$$

$$\lambda = (x^2 - 2x + 3)e^{x} + C$$

la solution générale y définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y = x^2 - 2x + 3 + Ce^{-x}.$$

au trien :

la solution particulière du type du 2ème membre :

$y = P(x)$

$y = P(x) = ax^2 + bx + c$

$y' = 2ax + b.$

$(E) : 2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2 + 1$

$ax^2 + x(2a + b) + b + c = x^2 + 1$

(1) $a = 1$

(2) $2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a = -2.$

(3) $b + c = 1 \Rightarrow c = 1 - b = 1 + 2 = 3$

d'où : $P(x) = x^2 - 2x + 3$

D'où la solution générale de l'équation complète est $y = y + y_0$

$//\ y = \lambda e^{-x} + x^2 - 2x + 3\ //$ $\lambda \in \mathbb{R}$

18. Equation différentielle du 2ème ordre avec coefficients constants y''+ py+ qy = 0

18.1 Résolution de l'équation y'+py' = 0

L'équation équivalant à y' + py = constant = c donc $y = \lambda e^{-pn} + c/p$

18.2 Résolution de l'équation y'' + qy = 0

Rq:1

$f(x) = e^{wx}$; $w \in \mathbb{R}$

on a : $f'(x) = w e^{wx}$

$f''(x) = w^2 e^{wx}$

on conclut que :

$$f''(x) - w^2 f(x) = 0$$

Remarque 2

$g(x) = \cos wx.$

$g'(x) = -w \sin wx$

$g''(x) = -w^2 \cos wx.$

on conclut que :

$$g''(x) + w^2 g(x) = 0$$

Remarque 3

$h(x) = \sin wx.$

$h'(x) = w \cos wx$

$h''(x) = -w^2 \sin wx.$

on conclut que :

$$h''(x) + w^2 h(x) = 0$$

Théorème :

Si $q > 0$ alors l'équation $y'' + qy = 0$ admet deux solutions particulières $x \longrightarrow \cos wx$ et $x \longrightarrow \sin wx$

avec $w^2 = q$

La solution générale de cette équation est :

$$y = A \cos wx + B \sin wx \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2, \; w^2 = q$$

Remarque.

La solution générale peut s'écrire sous la forme :

$y = \rho \cos(wx + \varphi)$

$\rho = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{A}{\rho} \\ \sin \varphi = \dfrac{B}{\rho} \end{cases}$$

si $q<0$ alors l'équation differentielle $y''+qy=0$ admet 2 solutions particuliers

$x \longmapsto e^{wx}$ et $x \longmapsto e^{-wx}$

donc la solution générale est :

$$y = A e^{wx} + B e^{-wx}$$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et $-q = w^2$

18.3 Résolution de l'équation y'' + py' +qy = 0

Recherche

Considérons l'équation differentielle $E : y''+py'+qy=0$ avec $(p,q) \in \mathbb{R}^2$.

cherchons une solution particulière de E de la forme : $y = e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{R}$.

on a : $y = e^{rx}$; $y' = re^{rx}$; $y'' = r^2e^{rx}$

on doit donc avoir : $r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0$

simplifions par e^{rx}, on a : $r^2+pr+q=0$ (1)

cette équation est appelée équation caractéristique

$$\Delta = p^2 - 4q.$$

1er cas : $\Delta > 0$

alors (1) admet 2 racines réelles soit r_1 et r_2 et les fonctions $y_1 = e^{r_1x}$ et $y_2 = e^{r_2x}$ sont des solutions particuliers de E.

Toute combinaison linéaire $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ sera aussi une solution de E.

on admet que la solution générale de E.

$$y = \alpha e^{r_1x} + \beta e^{r_2x}$$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

2ème cas : $\Delta = 0$

alors ① admet une racine double

$$r_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-p}{2}$$

donc $y_0 = e^{r_0 x}$ est une solution particulière de Ⓔ
on sait que $\lambda\, e^{r_0 x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ sera aussi une solution de Ⓔ.

<u>Methode de la variation de la constante</u>

on remplace λ par $\lambda(x)$.
imposons à y de verifier Ⓔ

$$y = \lambda(x)\, e^{r_0 x}$$

$$y' = \lambda'(x)\, e^{r_0 x} + \lambda(x) . r_0 e^{r_0 x}.$$

$$y'' = \lambda''(x)\, e^{r_0 x} + \lambda'(x) . r_0 e^{r_0 x} + r_0 \lambda'(x)\, e^{r_0 x} + r_0^2 \lambda(x)\, e^{r_0 x}.$$

Donc (E) : $e^{r_0 x}\left[\lambda''(x) + r_0\lambda'(x) + r_0\lambda'(x) + r_0^2\lambda(x) + p\left(\lambda'(x) + r_0\lambda(x)\right) + q\,\lambda(x)\right].$

$$\lambda''(x) + 2r_0\lambda'(x) + r_0^2\lambda(x) + p(\lambda'(x) + r_0\lambda(x)) + q\,\lambda(x) = 0$$

$$\lambda''(x) + \underbrace{(2r_0 + p)}_{=0}\lambda'(x) + \lambda(x)\underbrace{(r_0^2 + pr_0 + q)}_{=0} = 0$$

$$\lambda''(x) = 0$$

$$\lambda'(x) = \text{constante} = A$$

$\lambda(x) = Ax + B$ C'est une fonction affine.

on conclut que : $y = (Ax + B)e^{r_0 x}$ avec $r_0 = -\frac{p}{2}$

<u>Conclusion</u> :

si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une racine double $r_0 = \frac{-p}{2}$ et l'equation diff(E) admet pour solution générale : $y = (Ax + B)e^{r_0 x}$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $r_0 = -\frac{p}{2}$

3ème Cas : si $\Delta < 0$

alors l'équation caractéristique (1) admet 2 racines complexes et conjugués.

$r_1 = a + ib$ et $r_2 = a - ib$.

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Remarque.

$r_1 + r_2 = 2a = -p$

$r_1 \cdot r_2 = a^2 + b^2 = q$

on pose. $y = z e^{ax}$ est une solution particulière.

on aura : $y' = z' e^{ax} + z a e^{ax}$

$y'' = z'' e^{ax} + a z' e^{ax} + z' a e^{ax} + a^2 z e^{ax}$

$e^{ax}[(z'' + 2az' + a^2 z) + p(z' + az) + qz] = 0$

$z'' + (2a + p) z' + (a^2 + ap + q) z = 0$

or : $2a + p = 0$

$z'' + (ap + a^2 + b^2) z = 0$

$z'' + (a^2 - 2a^2 + a^2 + b^2) z = 0$

$z'' + bz = 0$

(2) $z = A \cos bx + B \sin bx$

c/c : $// y = (A \cos bx + B \sin bx) e^{ax} //$

18.4 Solution de l'équation complète

$y'' + py' + qy'' = g(x)$.

- si g est un polynôme de degré n

on cherche une solution particulière de (E) sous forme d'un polynôme dont le degré est :

- n si $q \neq 0$
- n+1 si $q = 0$
- n+2 si $p = 0$ et $q = 0$ 75

• Si $g(x) = e^{sx}$, $s \in \mathbb{R}$.

on cherche une solution particulière de (E).
sous la forme :

- αe^{sx} si s n'est pas une racine simple de (1).
- $\alpha x e^{sx}$ si s est une racine simple de (1)
- $\alpha x^2 e^{sx}$ si s est une racine double de (1).

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

• si $g(x) = \varphi(x) e^{sx}$ où φ est un polynôme de degré

on cherche une solution particulière de E sous la forme :

- $P(x) e^{sx}$ si s n'est pas une racine de (1)
- $x P(x) e^{sx}$ si s est une racine simple de (1)
- $x^2 P(x) e^{sx}$ si s est une racine double de (1)

• Si $g(x) = P(x) \cos x$ ou $P(x) \sin x$
on cherche une solution particulière de (E)
sous la forme :

$\varphi_1(x) \cos sx + \varphi_2(x) \sin sx$.

où $\deg \varphi_1 = \deg \varphi_2 = \deg P$

Remarque :
La solution générale de l'équation complète
se met sous la forme :

$y = y_0 + \underline{y}$

18.5 Exercices

Exercice 1 :

Résoudre l'équation différentielle (E)

(E) : $y'' - 2y' + y = x^2 e^x$.

E.H : $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$ est une racine double

Solution de l'équation homogène :

$y = (\alpha x + \beta) e^x$.

La solution particulière est de la forme :

$y_0 = (ax^2 + bx + c) x^2 e^x$.

$y_0 = \dfrac{x^4}{12} e^x$

d'où : $y = y + y_0$

$y = (\alpha x + \beta) e^x + \dfrac{x^4}{12} e^x$; $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 :

Intégrer l'équation différentielle linéaire :

(E) : $y'' + 4y' + 13y = x^2 + \sin x$.

* E.H : $y'' + 4y' + 13y = 0$ (1)

$r^2 + 4r + 13 = 0$

$r_1 = -2 - 3i$ et $r_2 = -2 + 3i$

L'intégrale générale de l'équation (1) est alors :

$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

* Recherche d'une intégrale particulière de l'équation complète.

A cet effet, nous allons chercher une intégrale particulière pour chacune des équations :

$y'' + 4y' + 13y = x^2$ (2)

$y'' + 4y' + 13y = \sin x$ (3)

* Cherchons pour l'équation (2), une intégrale particulière de la forme :

$y = ax^2 + bx + c$

Soit : $y_1 = \frac{1}{13}x^2 - \frac{8}{169}x + \frac{6}{2197}$.

* Cherchons pour l'équation (3) une intégrale particulière de la forme :

$y = K_1 \cos x + K_2 \sin x$

$y' = -K_1 \sin x + K_2 \cos x$.

$y'' = -K_1 \cos x - K_2 \sin x$.

En reportant dans l'équation (3) et en identifiant on obtient :

$12K_1 + 4K_2 = 0$

$12K_2 - 4K_1 = 1$

$K_1 = -\frac{1}{40}$ et $K_2 = \frac{3}{40}$

l'intégrale particulière de l'équation (3) :

$y_2 = -\frac{1}{40}\cos x + \frac{3}{40}\sin x$

Exercice 3 :

1) $4y'' + 49y = 0$

2) Trouver la solution particulière vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$

1/ $y'' + w^2 y = 0$ $\quad w^2 = \frac{49}{4}$

$y = \alpha \cos\frac{7}{2}x + \beta \sin\frac{7}{2}x \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

2/ $f(0) = 1 \Rightarrow \alpha = 1$

$f'(0) = 2 \Rightarrow \beta = \frac{4}{7}$

$y = (\cos\frac{7}{2}x + \frac{4}{7}\sin x)$

exercice :

$y'' - 2y = 0$

$y = \alpha e^{-\sqrt{2}x} + \beta e^{\sqrt{2}x}; \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

TRACES GEOMETRIQUES

19. La perpendiculaire

19.1 Perpendiculaire par un point d'une droite

Une droite perpendiculaire à une autre droite forme avec celle-ci un angle de 90°.

Problème : Par un point A pris sur une droite d, tracer une perpendiculaire à cette droite.

Première méthode

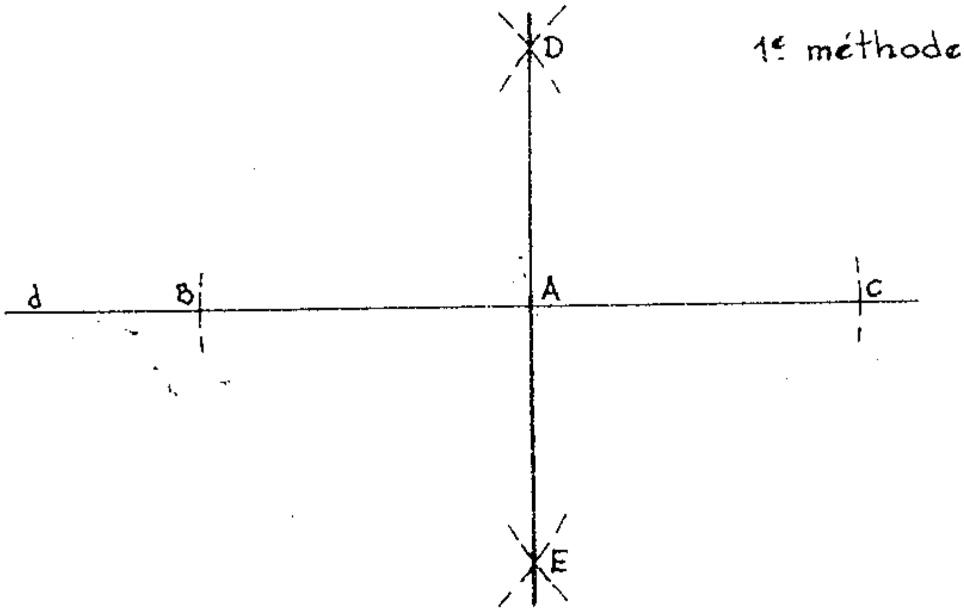
1 - tracer la droite d et déterminer le point A sur cette droite ;
2 - du point A comme centre, tracer un arc de cercle de rayon quelconque interceptant la droite d aux points B et C ;
3 - des points B et C comme centres, tracer deux arcs avec la même ouverture de compas quelconque.
Les intersections des arcs déterminent les points D et E,
4 - tracer la droite ED qui doit passer par le point A :
5 - la droite ED est perpendicualaire à la droite d.

Seconde méthode

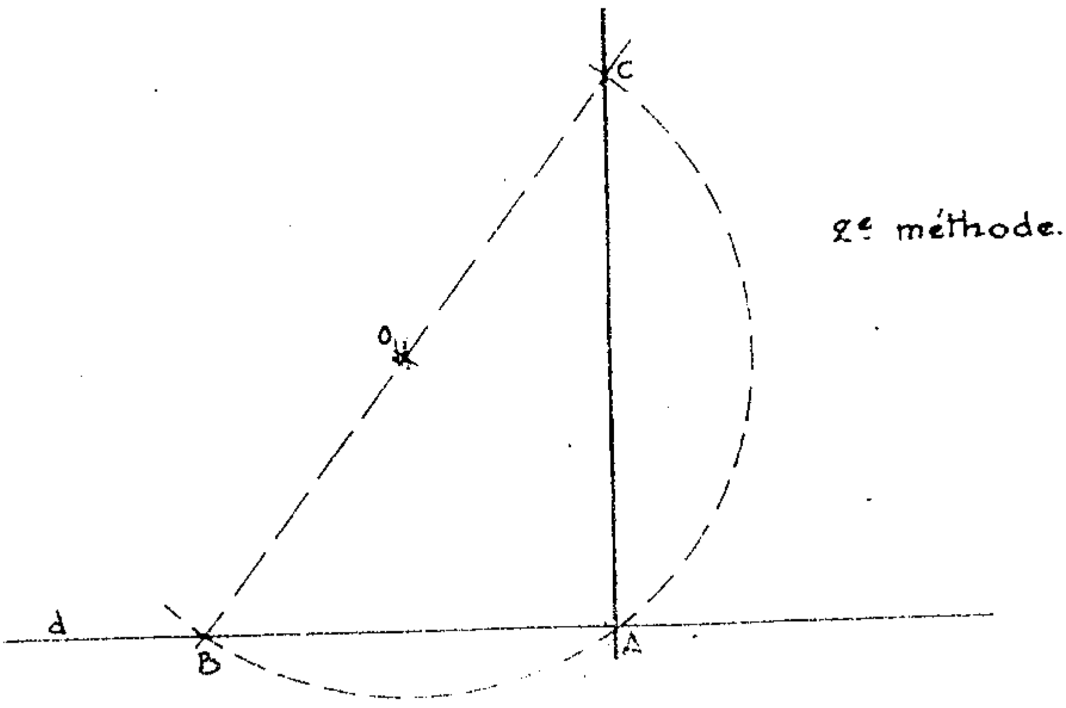
1 - tracer la droite d et déterminer le point A sur cette droite.
2 - déterminer le point O quelconque.
3 - du point O comme centre, tracer l'arc qui passe par le point A qui coupe la droite d au point B.
4 - tracer la droite BO et la prolonger jusqu'à l'intersection avec l'arc de centre O.
Le point d'intersection est le point C.
5 - tracer la droite AC qui est perpendiculaire à la droite d.

Solution

Menée par un point d'une droite



Par un point A d'une droite d, tracer une perpendiculaire à cette droite.



19.2 Perpendiculaire ^par un point hors d'une droit

Par un point hors d'une droite, on peut mener une perpendiculaire et on ne peut en mener qu'une seule.

Une perpendiculaire est une droite qui coupe une autre droite suivant un angle de 90°.

Problème :

Par un point A hors d'une droite d, tracer la perpendiculaire à cette droite.

Première méthode

1 - tracer la droite d et situer le point A hors de cette droite.

2 - du point A comme centre, avec une ouverture de compas quelconque, tracer un arc de cercle qui coupe la droite d aux points B et C.

3 - des points B et C comme centres, tracer deux arcs qui se coupent aux points D et E.
Les arcs auront le même rayon.

4 - tracer la droite DE qui, prolongée, doit passer également par le point A.

5 - tracer la droite AE est perpendiculaire à la droite d.

Seconde méthode

1 - tracer la droite d et situer le point A hors de la droite

2 - sur la droite d, déterminer les points B et C quelconques.

3 - du point B comme centre, tracer l'arc de cercle qui passer par le point A et le prolonger de l'autre côté de la droite d.

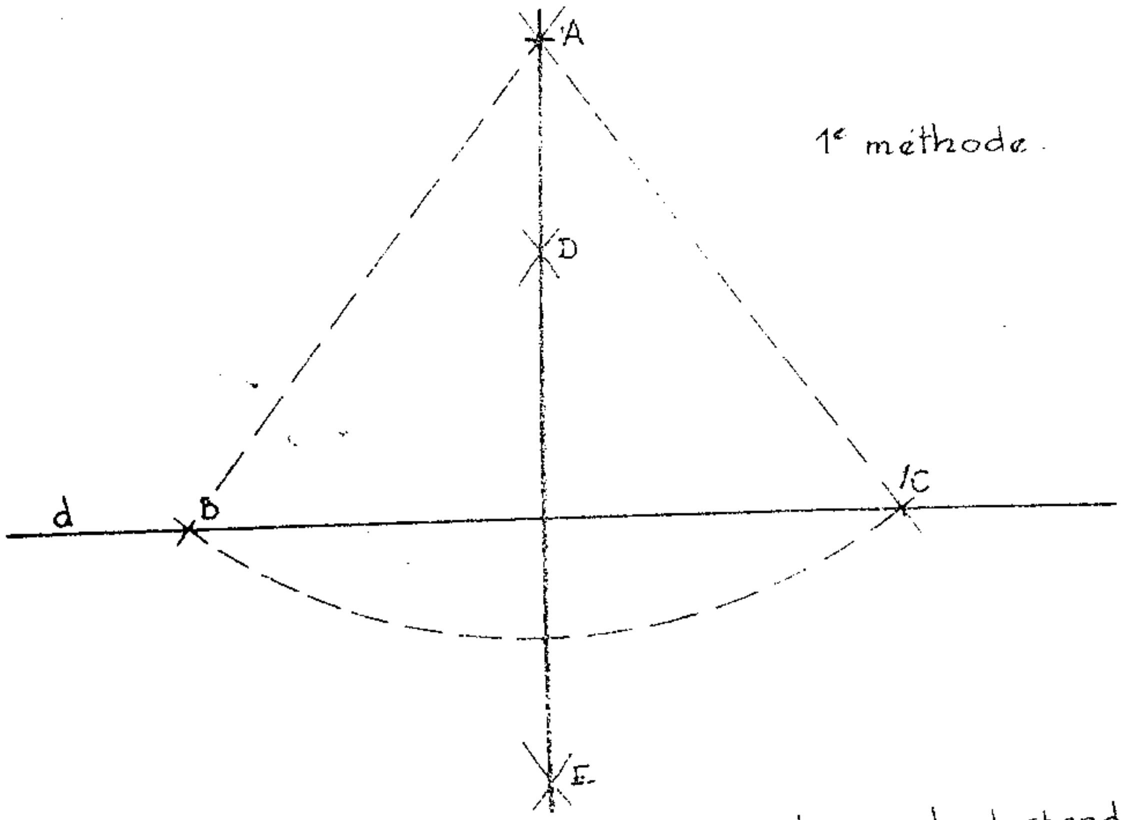
4 - faire de même du point C comme centre.

5 - l'intersection des deux arcs de centres B et C déterminer le point D.

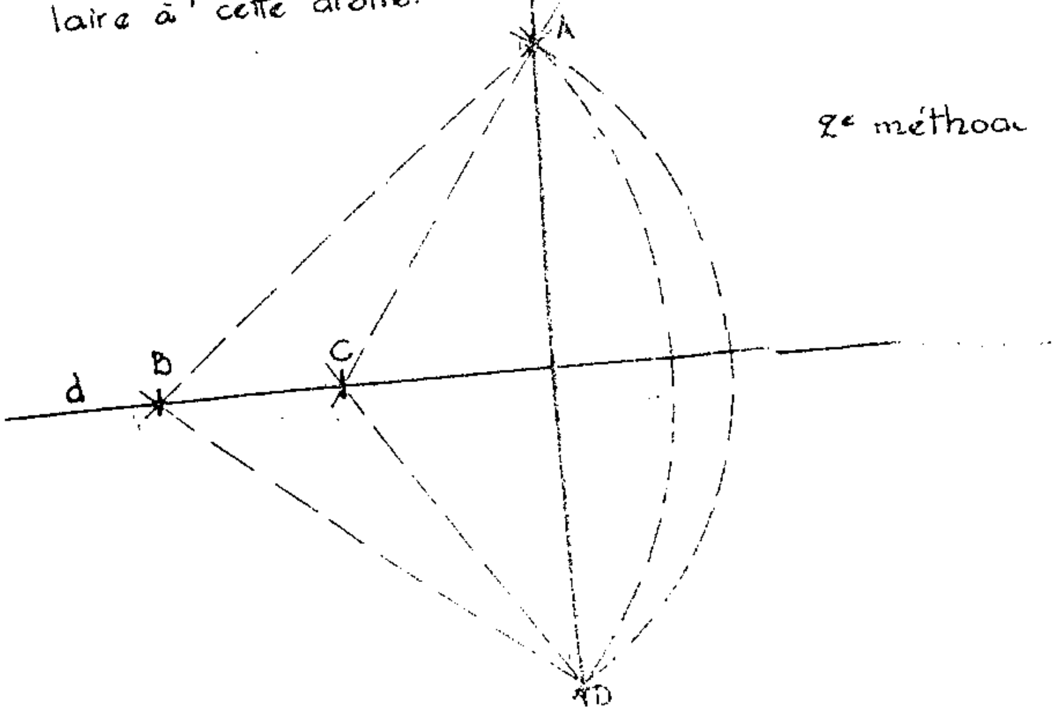
6 - la droite AD est perpendiculaire à la droite d.

Solution

Menée par un point hors d'une droite



Par un point A hors d'une droite d, tracer la perpendiculaire à cette droite.



20. Médiatrice

Problème n°1 :

Tracer la médiatrice du segment AB de la droite d.

Ou encore : diviser le segment AB de la droite d en deux parties égales.

Méthode :

1- tracer la droite d et déterminer les points A et B sur cette droite;

2- de A comme centre, avec un rayon quelconque $r > \frac{A}{B}$, tracer un arc de cercle ;

3- de B comme centre, avec le même rayon, tracer un autre arc de cercle; l'intersection des deux arcs détermine les points C et D

4- joindre les points C et D ; l'intersection des segments AB et CD détermine le point E;

Le segment CD est la médiatrice du segment AB et le point E est le point médian.

Problème n°2 :

Déterminer sur une droite d un point P qui soit à égale distance de deux points situés du même côté de la droite.

Méthode :

1- tracer la droite d ;

2- déterminer les points A et B quelconques mais situés du même côté de la droite d ;

3- tracer le segment AB et chercher sa médiatrice formée par le segment CD ;

4- l'intersection du segment CD prolongé et de la droite d détermine le point P ;

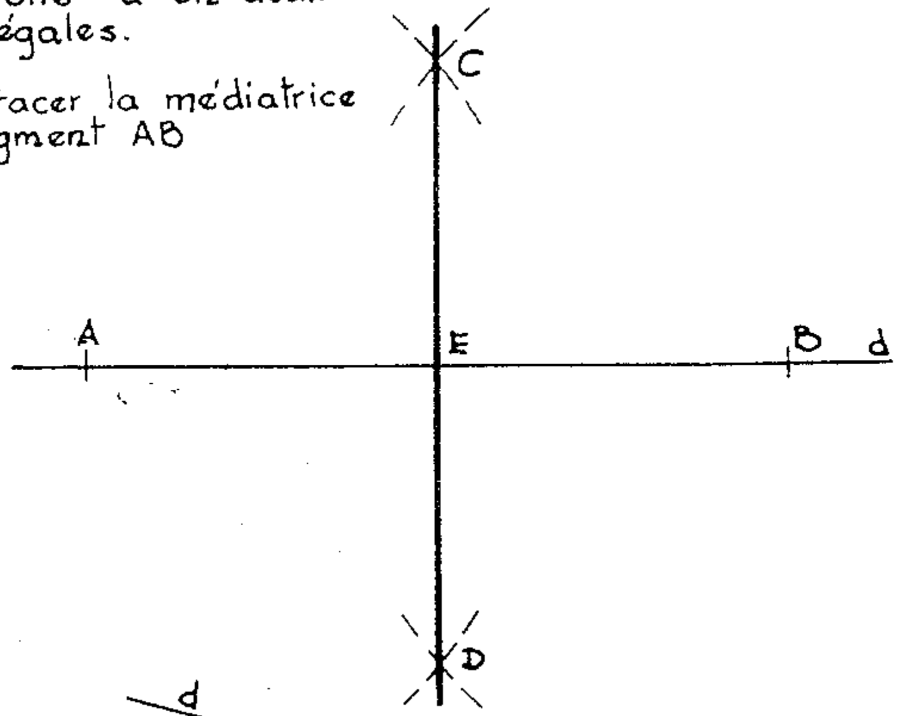
5- joindre AP et BP ;

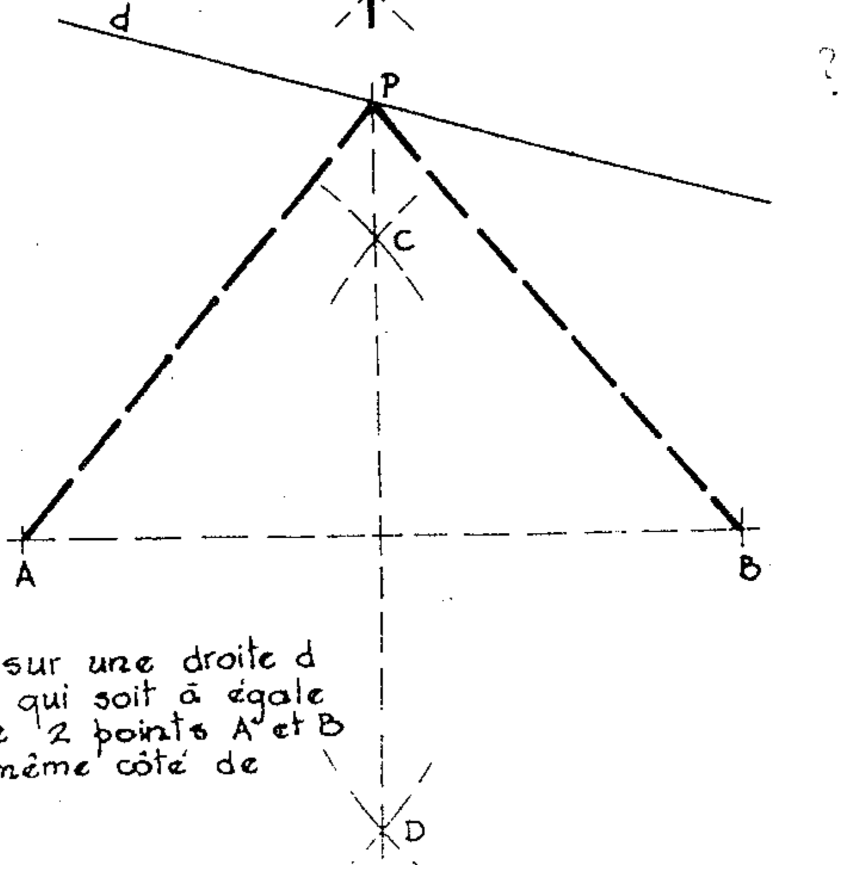
6- nous avons formé un triangle isocèle APB et les segments AP et BP sont égaux.

Solution

Diviser un segment AB d'une droite d en deux parties égales.

c.a.d. tracer la médiatrice d'un segment AB





Déterminer sur une droite d un point P qui soit à égale distance de 2 points A et B situés du même côté de la droite.

21. Parallèle

Problème n°1

Mener une parallèle à une droite d par un point A.

Méthode :

1- tracer la droite d et déterminer la position du point A qui est quelconque, mais sans être sur la droite d;

2- déterminer le point B quelconque sur la droite d ; le point idéal étant à l'opposé de A;

3- de B comme centre, avec un rayon égal à BA, tracer un arc coupant la droite d au point C;

4- garder la même ouverture de compas et avec A comme centre, tracer un arc passant par B;

5- de A comme centre, déterminer avec le compas la distance AC

6- garder la même ouverture de compas et avec B comme centre, tracer un arc coupant l'arc de rayon AB et de centre A; déterminer le point D, intersection des deux arcs.

7- tracer la droite DA qui est parallèle à d.

Problème n°2

Mener une parallèle à une droite d et qui soit à une distance imposée.

Méthode :

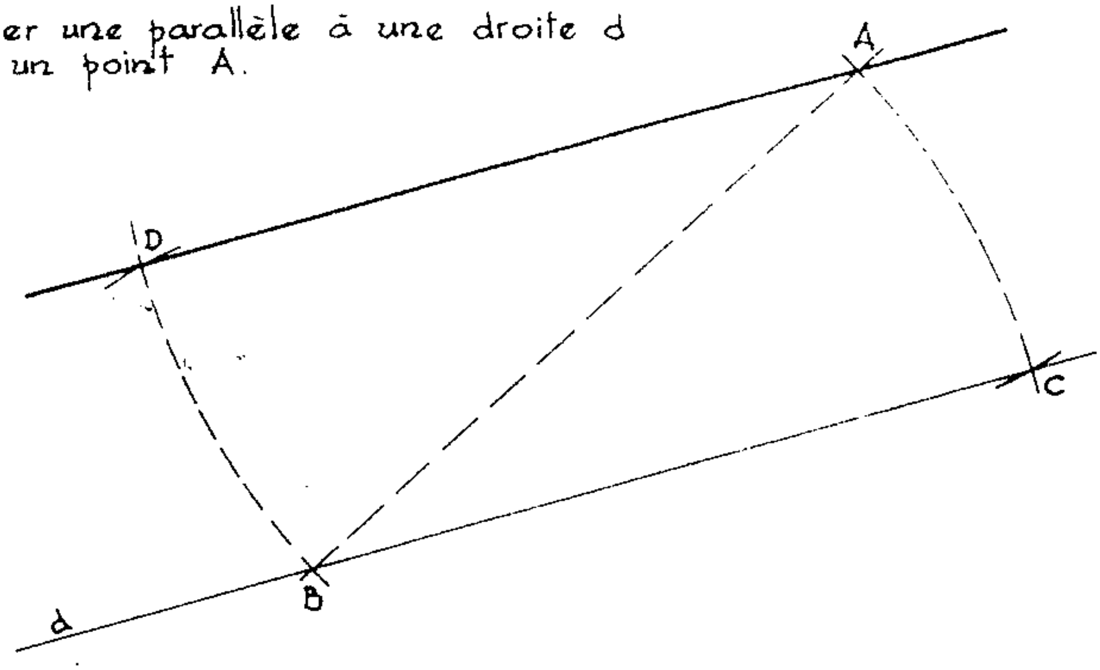
1- tracer la droite d et déterminer le point A quelconque sur la droite;

2- par A, mener une perpendiculaire à d sur laquelle on déterminer le point B, à la distance imposée de A;

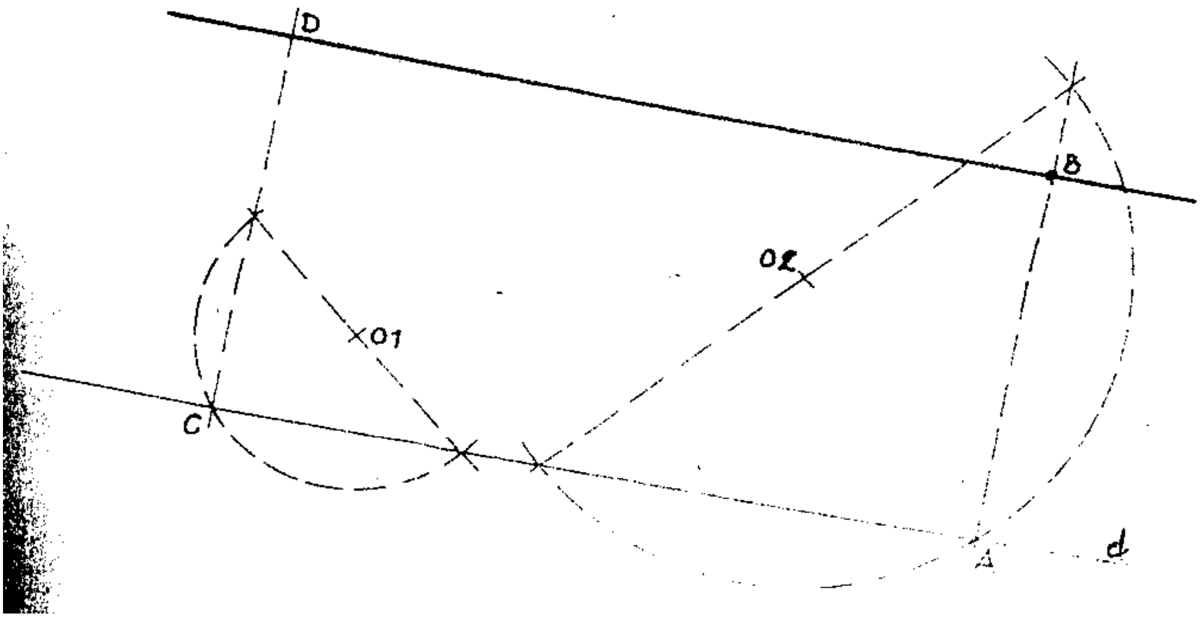
3- le problème consiste maintenant à mener une parallèle à d par le point B, par la méthode que nous venons de voir.

Solution

Mener une parallèle à une droite d par un point A.



Tracer une parallèle à une droite d et à une distance AB imposée.



22. Bissectrice

Problèmes : Construire la bissectrice d'un angle donné AOB.

Première méthode :

1- du point O comme centre, avec une ouverture de compas quelconque, tracer un arc de cercle qui coupe les côtés de l'angle aux points C et D ;

2- des points C et D comme centres, avec une même ouverture de compas quelconque, tracer deux arcs de cercle qui se coupent u point E. Le point E est un point de la bissectrice ;

3- tracer la bissectrice OE ; les angles AOE et EOB sont égaux.

Seconde méthode :

1- du point O comme centre, avec une ouverture de compas quelconque, tracer un arc de cercle qui coupe les côté de l'angle aux points C et D ;

2- de la même manière, avec une autre ouverture de compas, tracer un autre arc de cercle qui coupe les côtés de l'angle aux points E et F ;

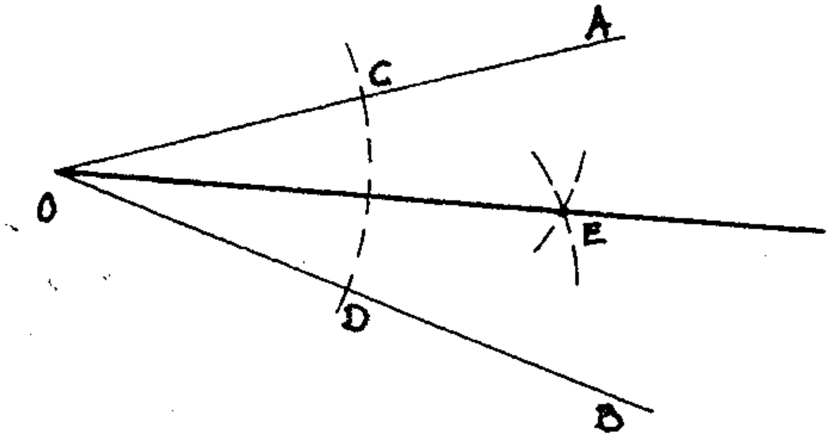
3- tracer les droites E-D et C-F ;

4- l'intersection de ces deux droites détermine le point G, point de la bissectrice ;

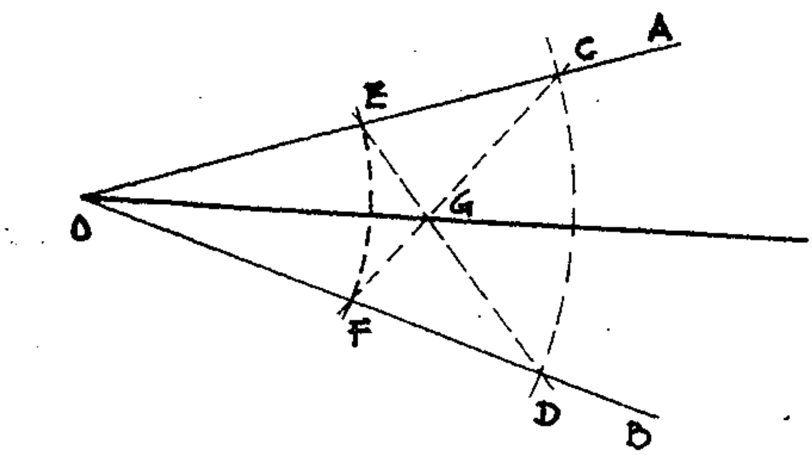
5- tracer la bissectrice OG ; les angles AOG et GOB sont égaux.

22.1 Bissectrice – sommets accessibles

Solution



Construire la bissectrice d'un angle donné AOB
1e méthode.



Construire la bissectrice d'un angle donné AOB
2e méthode.

22.2 Bissectrice – sommets inaccessibles

Le sommet d'un angle est dit "inaccessible" lorsque l'origine des demi-droites qui le composent, est située hors de l'épure.

Problème : Construire la bissectrice d'un angle donné dd' dont le sommet est inaccessible.

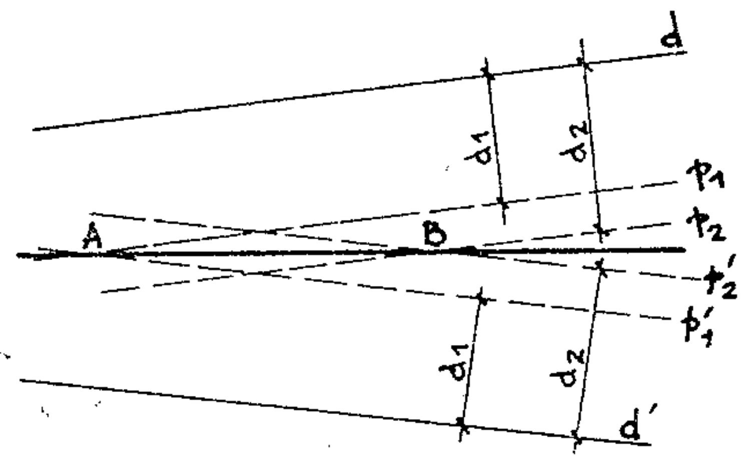
Première méthode :

1- tracer les demi-droites partielles d et d' formant l'angle donné ;
2- choisir des longueurs d1 et d2 quelconques ;
3- tracer les droites p1 et p'1 parallèles, à une distance d1, aux droites d et d' à l'intérieur de l'angle ; l'intersection de p1 et p'1 détermine le point A ;
4- de la même façon, tracer les droites p2 et p'2, parallèles à une distance d2, aux droites d et d', également à l'intérieure de l'angle ; l'intersection de p2 et de p'2 détermine le point B ;
5- tracer la droite AB qui est la bissectrice de l'angle donné dd'

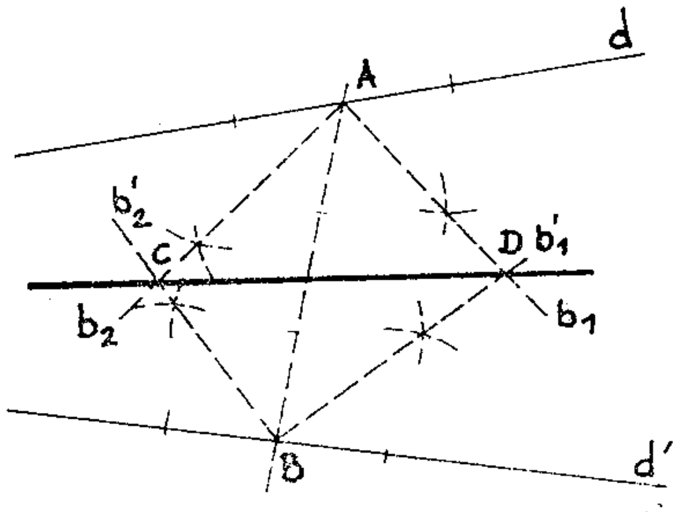
Deuxième méthode :

1- tracer les demi-droites partielles d et d' formant l'angle ;
2- sur les droites d et d', situer les points quelconques A et B ;
3- tracer la sécante AB qui forme deux angles complémentaire avec chaque droite d et d' ;
4- tracer la bissectrice de chaque angle ; soit b_1 et b_2 pour la droite d, et b'_1 et b'_2 pour la droite d' ; l'intersection de b_1 et b'_1 détermine le point C ; tandis que l'intersection de b_2 et b'_2 détermine le point D ;
5- la bissectrice de l'angle passe par les points C et D.

Solution



Construire la bissectrice d'un angle donné
1ere méthode.



Construire la bissectrice d'un angle donné
2e méthode

23. Cercle angles inscrits

23.1 Angles inscrits

Problème : ex- inscrire un cercle au triangle ABC donné.

Méthode :

Il existe trois solutions (une par côté du triangle) dont une seule est tracée sur le côté BC.

1- tracer le triangle ABC donné ;
2- prolonger le côté AB et former la demi-droite d_1 ;
prolonger le côté AC et former la demi-droite d_2 ;
3- les demi-droites d_1 et d_2 forment l'angle α ;
la demi-droite d_1 et le côté BC forment l'angle β ;
la demi-droite d_2 et le côté BC forment l'angle γ ;
4- tracer la bissectrice des angles α, β et γ ;
l'intersection des trois bissectrices détermine le point O ;
5- par le point O, tracer la perpendiculaire à la droite d_1, à la droite d_2 et au côté BC ; déterminer les points D,E et F ;
6- tracer le cercle demandé de rayon OD, OE ou OF, avec les points D,E et F de tangence.

Remarque :

Les trois solutions déterminent trois cercles, soit les centres O_1, O_2 et O_3.

Ces trois centres forment un triangle dont le triangle ABC est le triangle ORTHIQUE.

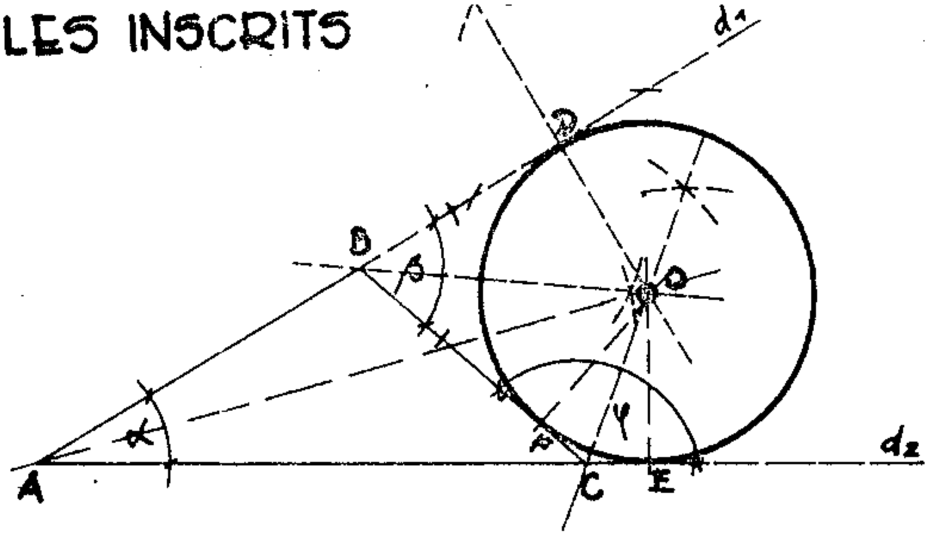
Problème : Retrouver le centre d'un arc de cercle donné.

Méthode :

1- soit l'arc de cercle quelconque dont on ignore la position du centre O ;
2- tracer une corde AB quelconque ;
3- tracer la médiatrice de la corde AB et déterminer la corde CD ; le centre O se trouvera sur la médiatrice ;
4- joindre les points A et D et tracer également la médiatrice ;
5- pour contrôle, faire de même avec les points D et B ;
6- l'intersection des trois médiatrices détermine le centre O.

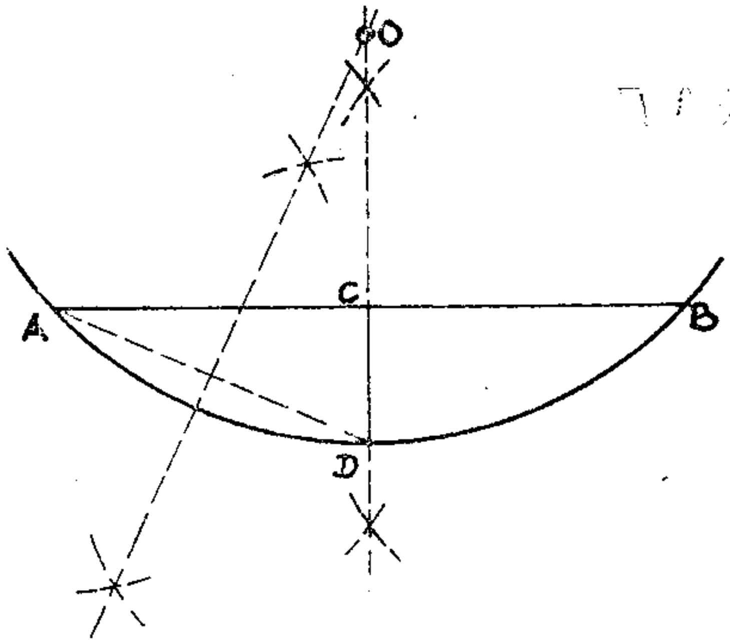
Solution

ANGLES INSCRITS



Ex-inscrire un cercle au triangle ABC.
3 solutions (1 seule est tracée)

Déterminer le centre d'un arc de cercle



Problème :

Faire passer un cercle par trois points A, B et C.

Ou encore : Circonscrire un cercle au triangle ABC.

Ou encore : Inscrire un triangle ABC à un cercle.

Méthode :

1 - Soit trois points quelconques, non alignés ;
2 - Ces trois points sont dénommés A, B et C ;
3 - Joindre A, B et C et former un triangle quelconque ;
4 - Tracer les médiatrices de chaque côté du triangle.
 Les trois médiatrices se coupent au point O, centre du cercle ;
5 - Poser la pointe du compas au centre O et tracer le cercle de rayon OA, OB ou OC.

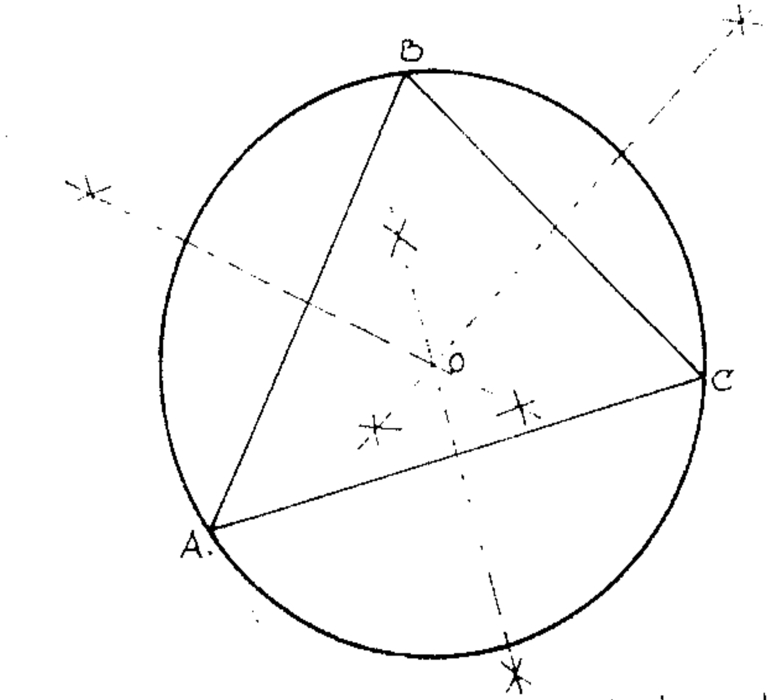
Problème :

Inscrire un cercle à un triangle ABC.

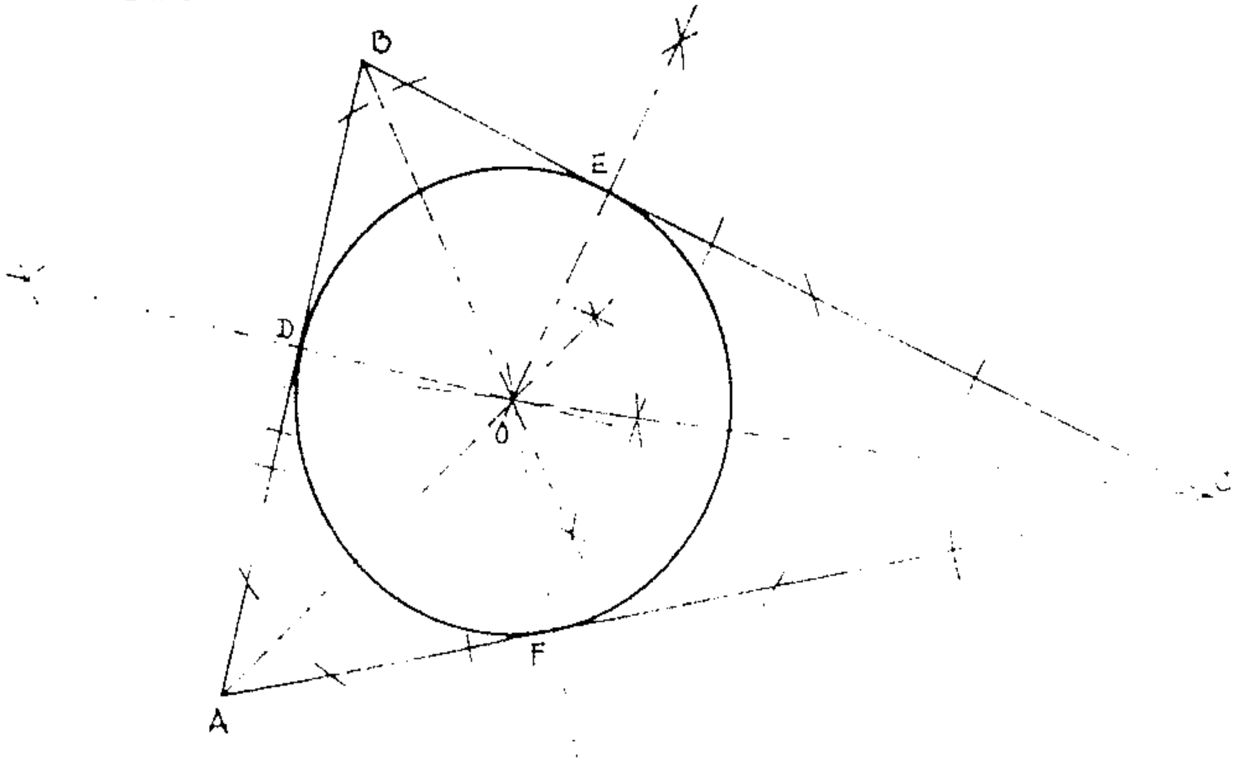
Méthode :

1 - Soit le triangle ABC quelconque ;
2 - Tracer les bissectrices des angles A, B et C ;
3 - Les trois bissectrices se coupent au point O, centre du cercle inscrit ;
4 - Par le point O, tracer les perpendiculaires aux côtés du triangle :
 Les points D, E et F sont les points de tangence au cercle circonscrit de rayon OD, OE ou OF.

Solution



Faire passer un cercle par trois points A, B, C.
Circonscrire un cercle à un triangle ABC.



Inscrire un cercle à un triangle ABC.

24. Divisions proportionnelles

Problème :

Diviser une droite AB quelconque en un nombre quelconque de parties égales.

Exemple : diviser le segment de droite AB en cinq parties égales.

Première méthode :

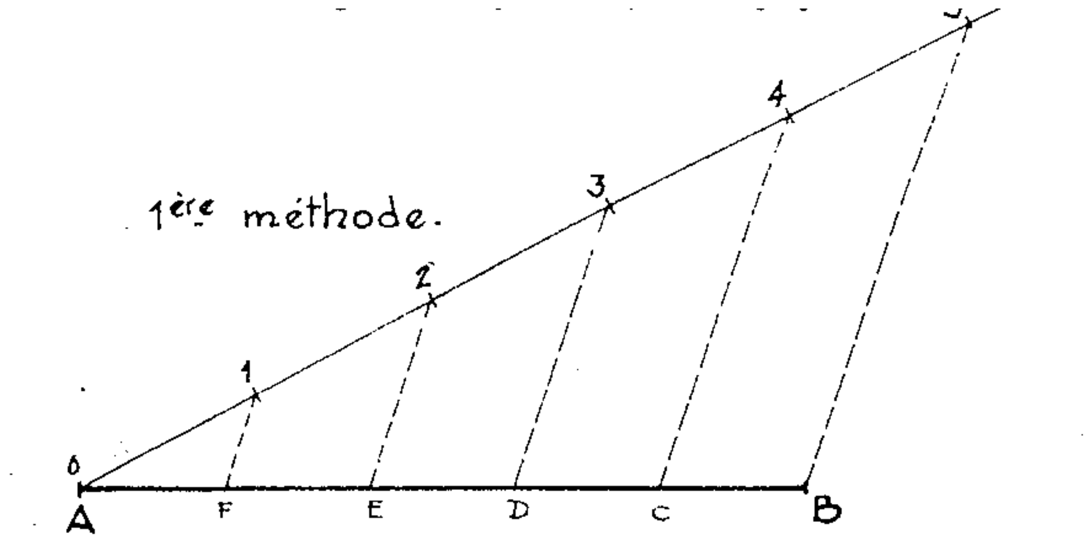
1- tracer le segment de droite AB donné ;
2- mener une demi-droite quelconque par le point A ;
3- porter sur la demi-droite quelconque cinq longueurs égales quelconques, en partant du point A et déterminer les points 0, 1, 2, 3, 4 et 5 ;
4- joindre le dernier point, soit le point 5, avec le point B ;
5- mener des parallèles à B-5 successivement par les points 4, 3, 2 et 1 et déterminer les points C, D, E et F ;
6- on obtient :

$$\frac{A-F}{0-1} = \frac{F-E}{1-2} = \frac{E-D}{2-3} = \frac{D-C}{3-4} = \frac{C-B}{4-5} = \frac{A-B}{0-5}$$

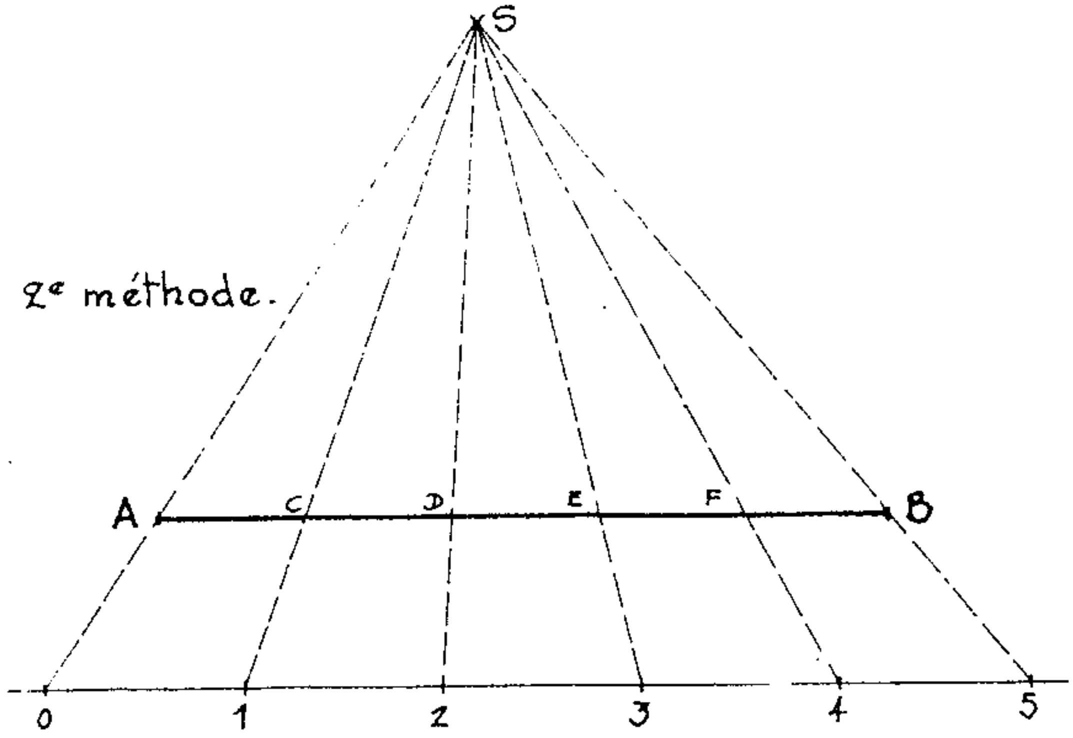
Seconde méthode :

Procéder de la même façon que la seconde méthode de la page précédente mais avec cinq longueurs égales.

Solution



Diviser une droite AB en 5 parties égales.



25. Division du cercle

Division ...

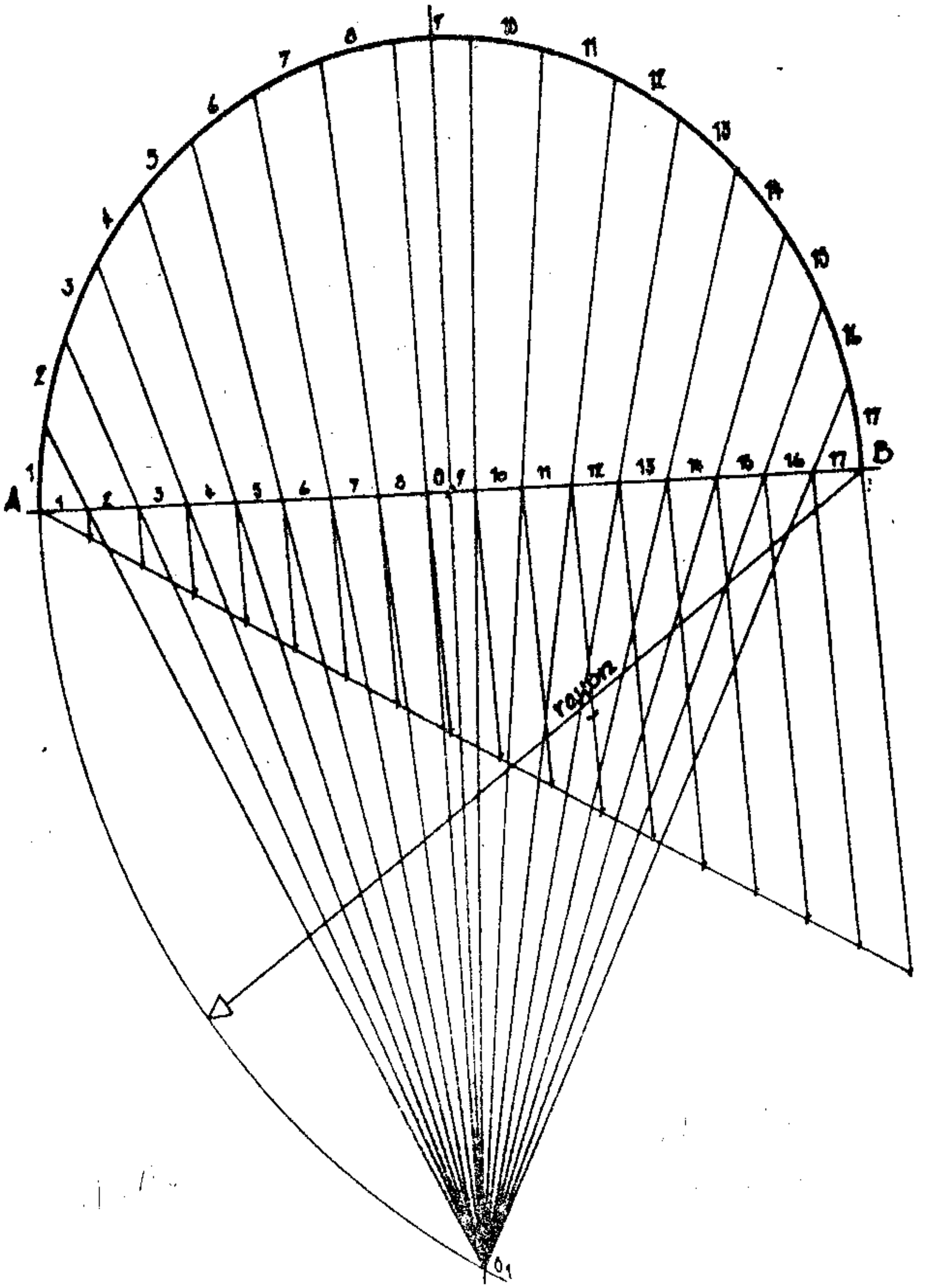
Problème : diviser un arc de 180°, en un nombre quelconque de parties égales.

Exemple : diviser l'arc AB en 17 parties égales

Méthode :

1- tracer l'arc AB, sa corde et sa flèche ;
2- diviser la corde AB en 17 parties égales par la méthode de divisions proportionnelles ;
3- avec le point A (ou le point B) comme centre, tracer un arc de rayon égal à la corde AB ;
4- l'intersection de cet arc et de la flèche prolongée détermine le point O_1 ;
5- tracer les droites O_1-1, O_1-2, O_1-3, etc et les prolonger jusqu'à l'arc à diviser.

Diviser l'arc A-B en 17 parties égales - (par exemple)



26. Polygones réguliers inscrits

Problème : Inscrire un hexagone régulier dans un cercle donné.

Méthode :

1- tracer le cercle de centre O et de rayon R donné ;

2- tracer le diamètre AB ;

3- du point A comme centre, avec le rayon R,
tracer un arc qui coupe le cercle en C et en D ;

4- du point B comme centre, avec le même rayon R,
tracer un autre arc qui coupe le cercle en E et F ;

5- tracer l'hexagone en joignant les points A, C, E, B, F, D et A.

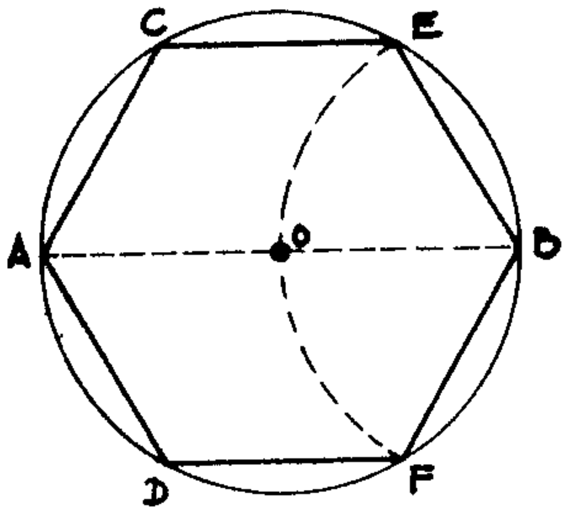
Problème : Inscrire un triangle équilatéral dans un cercle donné.

Méthode :

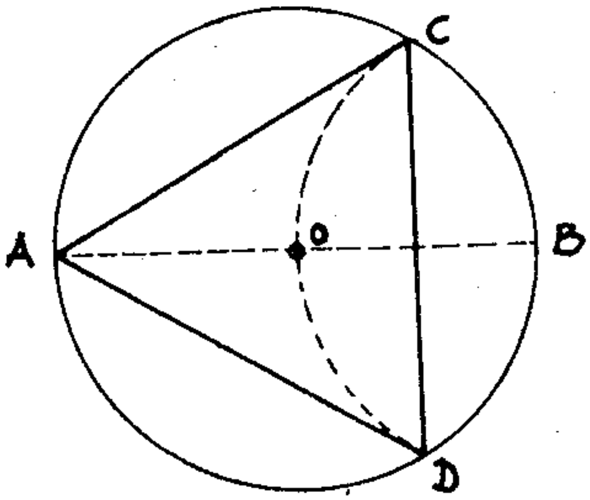
Reprendre la méthode de tracé de l'hexagone mais en traçant un seul arc d epuis le point A (ou le point B)

Solution

DIVISION DE LA CIRCONFERENCE



Diviser une circonférence en 6 parties égales.
Inscrire un hexagone régulier dans un cercle donné.



Diviser une circonférence en 3 parties égales.
Inscrire un triangle équilatéral dans un cercle donné.

POLYGONES REGULIERS

Problème : Inscrire un carré dans un cercle donné.

Méthode :

1- tracer le cercle donné ;

2- tracer le rayon quelconque AB ;

3- tracer la médiatrice de AB et déterminer les points C et D ;

4- joindre les sommets A,B,C et D du carré demandé.

Problème : Inscrire un octogone régulier dans un cercle donné.

Méthode :

1- tracer le cercle donné ;

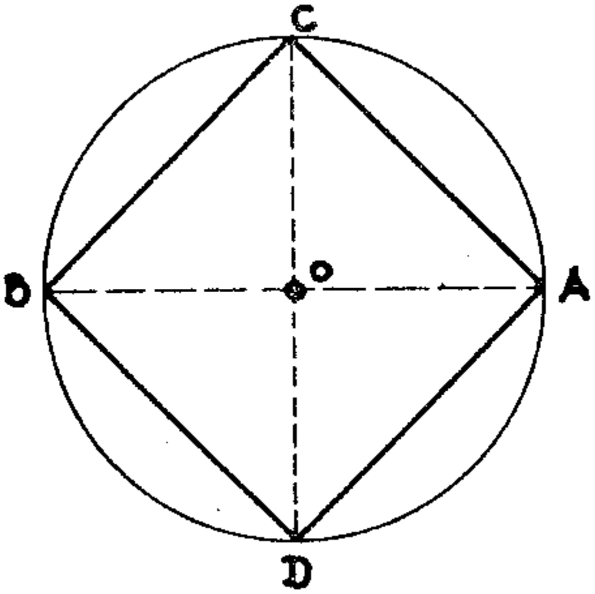
2- tracer un carré par la méthode précédente ;

3- tracer la médiatrice de chaque côté du carré et déterminer les points E, F, G et H ;

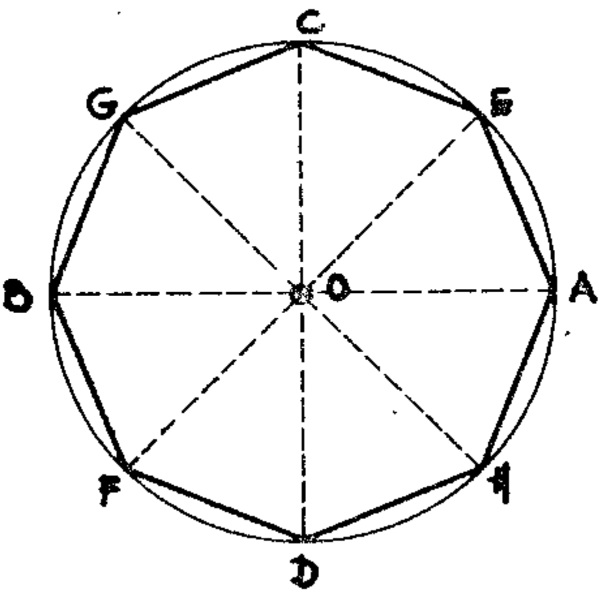
4- joindre les sommets A, B, C, D, E, F, G et H de l'octogone demandé ;

5- les sommets E, F, G et H peuvent être obtenus facilement avec un angle à 45° passant par le centre O.

Solution



Diviser une circonférence en 4 parties égales.
Inscrire un carré dans un cercle donné.



Diviser une circonférence en 8 parties égales.
Inscrire un octogone régulier dans un cercle donné.

POLYGONES SEMBLABLES

Problème : Construire un polygône semblable à un autre polygône donné, mais dans un rapport linéaire.

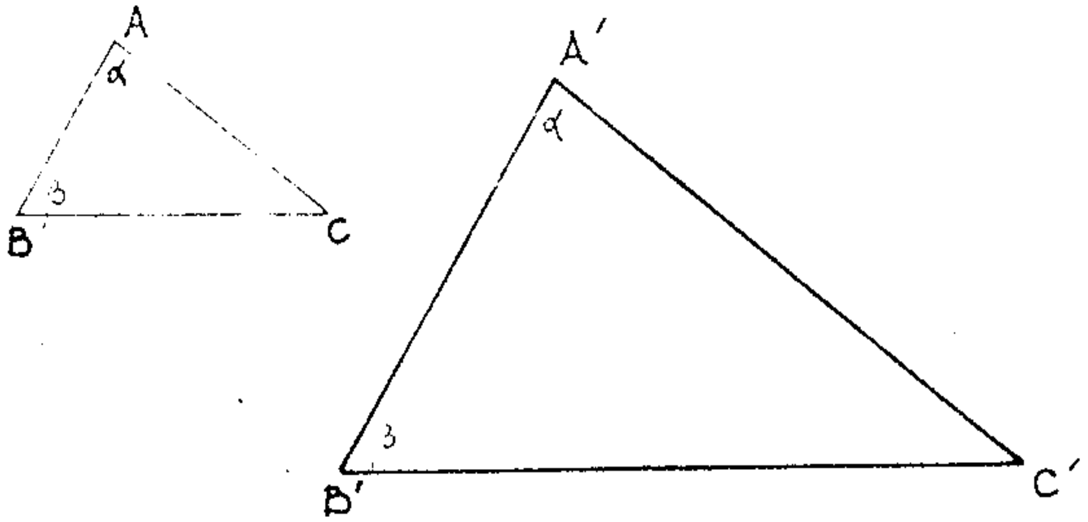
Soit : Construire le triangle A'B'C' semblable au triangle ABC donné, de telle manière que chaque côté soit dans un rapport de 4 à 9.

Méthode :

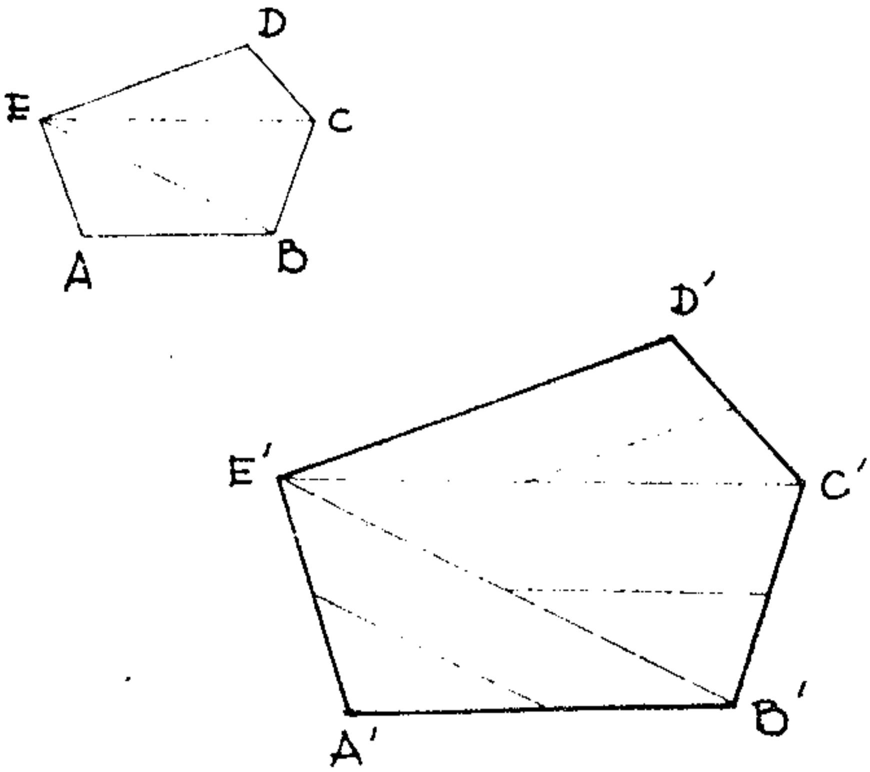
1 - Tracer le triangle ABC donné ;
2 - Le rapport 4 à 9 signifie que chaque côté du triangle ABC doit être multiplié par 9/4, soit 2,25 pour obtenir les côtés du triangle A'B'C' ; les angles restent les mêmes ;
3 - Tracer la droite B'C' égale à BC x 2,25 ;
4 - De B', reporter l'angle β et tracer la direction de B'A' ;
5 - Tracer la droite B'A' égale à BA x 2,25 ; determiner le point A' ;
6 - De A', reporter l'angle α et tracer la droite A'C' ;
7 - Vérifier que A'C' est égale à AC x 2,25, que les côtés sont bien parallèles à ceux du triangle initial ; vérifier la valeur du troisième angle.

Pour construire un polygône semblable à un polygône donné, il suffit de procéder comme décrit plus haut après avoir divisé le polygône en triangles.

Solution



Sur un segment donné B'C', construire un triangle semblable à un triangle donné ABC.



Sur un segment donné A'B', construire un polygone semblable à un polygone donné ABCDE.

MODULE N°:06

MATHÉMATIQUE APPLIQUÉE

EVALUATION DE FIN DE MODULE

ENONCE

TRACES GEOMETRIQUES : Test n° 1 - durée 60 minutes.

Dessiner sur feuille de format A4, disposée horizontalement.

Tracé au crayon sur papier.

Toutes les lignes de construction doivent figurer en traits fins et les résultats en traits forts.

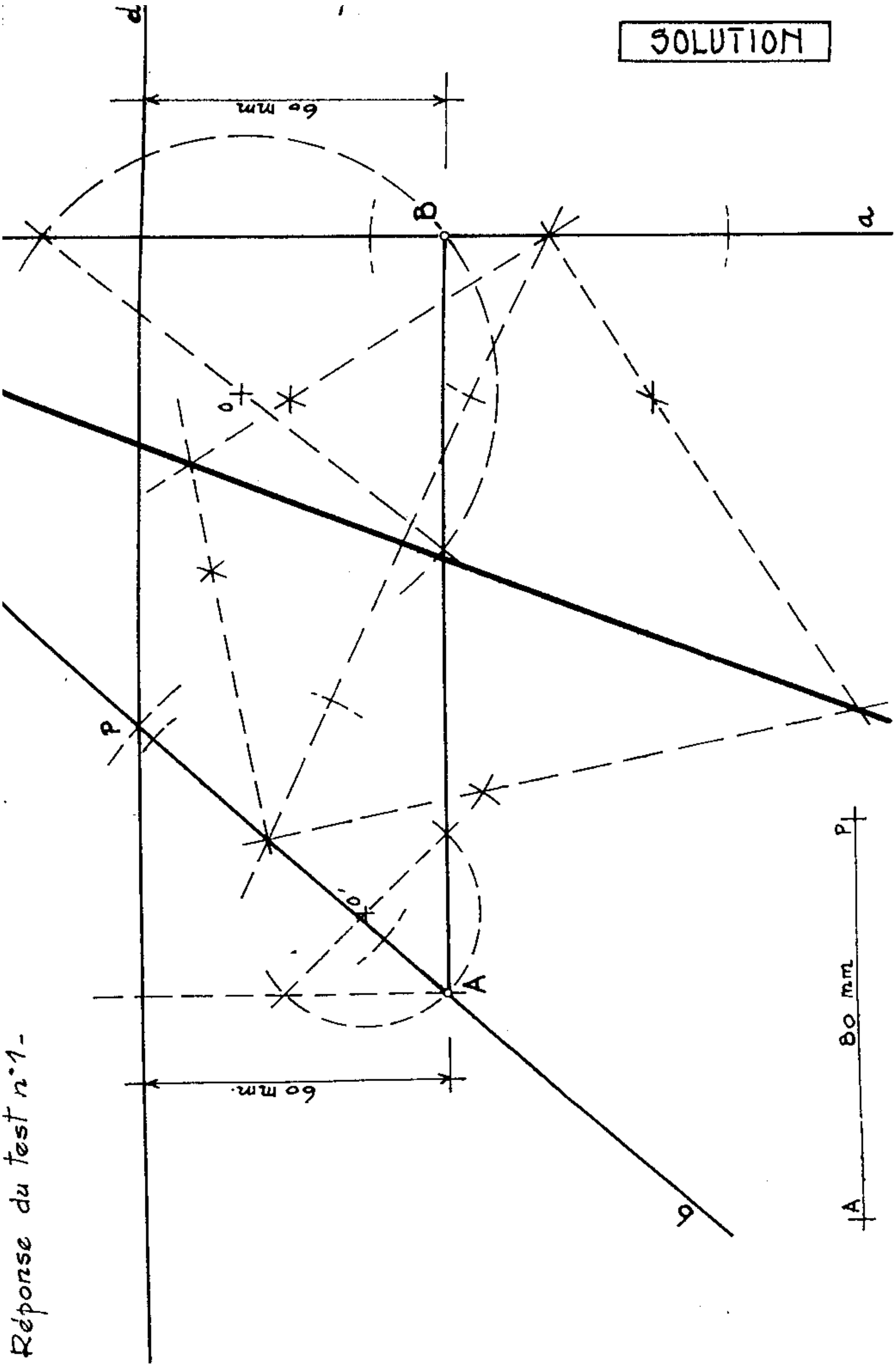
Le coin inférieur gauche de la feuille est l'origine des coordonnées.

1 - Soit la droite AB .
A (80;90) et B (230;90)
Par B, tracer la perpendiculaire à AB.

2 - Tracer la droite d, parallèle à la droite AB, à une distance de 60 mm vers le haut de la feuille.

3 - Déterminer sur la droite d un point P qui soit à 80 mm de A, mais le plus près possible de B.
Les points A et P déterminent la droite b.

4 - Tracer la bissectrice de l'angle formé par les droites a et b


SOLUTION
60 mm
60 mm.
80 mm
Réponse du test n°1-

Liste des références bibliographiques

Ouvrage	Auteur	Edition
SERGE MILLES et JEAN LAGOFUN	MATEMATIQUE APPLIQUEE	1992
LUCIEN LAPOINTE et GILLES MEYER	MATHEMATIQUE APPLIQUE AUX TRAVAUX PUBLIQUE, BÂTIMENTS ET LEVERS URBAINS	1991

NB : Outre les ouvrages, la liste peut comporter toutes autres ressources jugées utiles (Sites Internet, Catalogues constructeurs, Cassettes, CD, …)