

OFPPT

ROYAUME DU MAROC

مكتب التكوين المهني وإنعاش الشغل

Office de la Formation Professionnelle et de la Promotion du Travail

DIRECTION RECHERCHE ET INGÉNIERIE DE FORMATION

**RÉSUMÉ DE THÉORIE
&
GUIDE DES TRAVAUX PRATIQUES**

MODULE N°: 7	MECANIQUE APPLIQUEE ET RESISTANCE DES MATERIAUX
-------------------------	--

SECTEUR : CONSTRUCTION METALLIQUE

SPECIALITE : TCM

NIVEAU : TECHNICIEN

Document élaboré par :

Nom et prénom
NAE GABRIEL

EFP
GM – CDC – CM

DR
GC

Révision linguistique

-
-
-

Validation

-
-
-

SOMMAIRE

1	DEFINITIONS ET HYPOTHESES	8
	1.1 Généralités	8
	1.2 Buts de la résistance des matériaux	8
	1.3 Hypothèses	8
	1.3.1. Le matériau	8
	1.3.2 Notion de Poutre	9
	1.3.3 Les forces extérieures	10
	1.3.4 Les déformations	10
	1.3.5 Hypothèse Navier & Bernoulli	11
	1.3.6 Principe de St. Venan et conséquence	11
	1.3.7 Liaisons	11
	1.2. Notion de contrainte - Vecteur contrainte	12
	1.2.1 Définition du torseur de cohésion	13
	1.2.2 Repère de définition des sollicitations	13
	1.2.3 Dénomination des composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion	13
	1.2.4 Contrainte en un point M d'une section S	14
	1.2.4.1 Définitions	14
	1.2.4.2 Contrainte normale	15
	1.2.4.3 Contraintes tangentielles	15
	1.2.4.4 Relations entre torseur de cohésion et contraintes	15
	1.3 Notions sur les coefficients de sécurité	15
	1.4. Diagrammes	16
2	LES SOLLICITATIONS SIMPLES	16
	2.1 La Traction	16
	2.1.1 Définitions	16
	2.1.2 Contrainte normale	17
	2.1.3 Déformation	17
	2.1.4 Phénomène de concentration de contrainte	18
	2.2. La compression simple	19
	2.3 Le Cisaillement	19
	2.3.1 Définitions	19
	2.3.2 Contrainte de cisaillement	19
	2.3.3 Condition de résistance	19
	2.3.4 Déformation	20
	2.4. La flexion simple	20
	2.4.1 Définitions	20
	2.4.2 Contraintes normales	20
	2.4.3 Allongement / Raccourcissement relatif de la fibre M'M	21
	2.4.4 Expression de la contrainte normale	21
	2.4.5 Relation entre contrainte normale et moment fléchissant	21
	2.4.6 Moment quadratique	22
	2.4.6.1 Définitions	22

	2.4.6.2 Théorème de Huygens	23
	2.4.6.3 Moments quadratiques usuels	24
	2.4.7 Module de flexion	24
	2.4.8 Contrainte normale maximale	24
	2.4.9 Condition de résistance à la contrainte normale	24
	2.4.10 Équation de la déformée	25
	2.5. La torsion simple	26
	2.5.1 Définitions	26
	2.5.2 Contrainte tangentielle de torsion	26
	2.5.3 Condition de résistance	27
	2.5.4 Déformation	27
	2.6 Le Flambage	27
	2.6.1 Définitions	27
	2.6.2 Flambage d'Euler	28
	2.6.3 Contrainte critique	29
	2.6.4 Méthodes de calcul	29
	2.6.4.1 Méthode Euler - Rankine.	29
3	LES ESSAIS	30
	3.1 Essai de traction	30
	3.1.1 Définitions	31
	3.1.2 Courbes de contraintes et déformation	31
	3.1.3 Module d'élasticité longitudinale	31
	3.1.4 Loi de Hooke	32
	3.1.5 Déformations élastiques	32
	3.1.6 Limite élastique	32
	3.1.7 Limite conventionnelle d'élasticité	32
	3.1.8 Limite maximale	33
	3.1.9 Phénomène d'écrouissage	33
	3.1.10 Courbes de traction de divers matériaux	33
	3.2 Essai de résilience	34
	3.3 Essai de dureté	35
	3.3.1 Dureté Brinel	35
	3.3.2 Dureté Vickers	35
	3.3.3 Dureté Rockwell	35
	3.4 Caractéristiques de quelques matériaux	36
4	EXERCICES	37
	4.1 Problème de traction	37
	4.2 Problème de cisailage	38
	4.3 Problème de cisailage des rivets	39
	4.4 Problème de cisailage des soudures	40
	4.5 Problème de calcul des caractéristiques de la section	41
	4.6 Problème de flexion. Poutres sur deux appuis de niveau	44
	4.7 Problème de flexion. Poutre avec porte à faux	45
	4.8 Problème de flexion. Poutre sur deux appuis de niveau	47
	4.9 Problème de flexion. Poutres encastées à une extrémité.	48

MODULE 07 : MECANIQUE APPLIQUEE ET RESISTANCE DES MATERIAUX

Code :	Théorie :	30 % 29 h
Durée : 96 heures	Travaux pratiques :	66 % 64 h
Responsabilité : D'établissement	Évaluation :	4 % 3 h

OBJECTIF OPERATIONNEL DE PREMIER NIVEAU

DE COMPORTEMENT

COMPORTEMENT ATTENDU

Pour démontrer sa compétence, le stagiaire doit **mettre en application la mécanique et résistance des matériaux** selon les conditions, les critères et les précisions qui suivent.

CONDITIONS D'ÉVALUATION

- Travail individuel
- À partir de :
 - Consignes et directives ;
 - Plan, croquis;
 - Un cahier des charges
 - Questions et problèmes
- À l'aide de :
 - Normes ;
 - Documents techniques
 - Catalogues de fournisseurs des outils et outillages ;

CRITERES GENERAUX DE PERFORMANCE

- démarche méthodique de calcul
- précision et exactitude des calculs
- respect des normes
- argumentation et justification des réponses
- respect des méthodes de résolution

OBJECTIF OPERATIONNEL DE PREMIER NIVEAU

DE COMPORTEMENT (suite)

DE COMPORTEMENT (suite)	
<p>PRECISIONS SUR LE COMPORTEMENT ATTENDU</p> <p>A. Calculer les contraintes de poutres isostatiques soumises à des sollicitations simples</p>	<p><i>CRITERES PARTICULIERS DE PERFORMANCE</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - Exactitude des calculs - Respect des normes et règles en vigueur - Respect de la méthode de résolution
<p>B. Dimensionner et vérifier des éléments métalliques en tenant compte des déformations (flexion, traction...)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Exactitude des calculs - Respect des normes et règles en vigueur - Respect de la méthode de résolution
<p>C. Dimensionner des éléments soumis à des sollicitations composées</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Exactitude des calculs - Respect des normes et règles en vigueur - Respect de la méthode de résolution
<p>D. Résolution de problèmes avec mouvements rectilignes uniformes</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Exactitude des calculs - Respect de la méthode de résolution

OBJECTIFS OPERATIONNELS DE SECOND NIVEAU

LE STAGIAIRE DOIT MAÎTRISER LES SAVOIRS, SAVOIR-FAIRE, SAVOIR-PERCEVOIR OU SAVOIR-ÊTRE JUGES PRÉALABLES AUX APPRENTISSAGES DIRECTEMENT REQUIS POUR L'ATTEINTE DE L'OBJECTIF OPÉRATIONNEL DE PREMIER NIVEAU, TELS QUE :

Avant d'apprendre à *calculer les contraintes de poutres isostatiques soumises à des sollicitations simples* (A) :

1. Connaître les phénomènes de traction, compression, flexion...
2. Identifier et analyser les diagrammes (traction, compression, flexion...)
3. Maîtriser les méthodes de calcul

Avant d'apprendre à *dimensionner et vérifier des éléments métalliques en tenant compte des déformations* (B) :

4. déterminer les caractéristiques géométriques des sections usuelles
5. maîtriser la méthode de calcul

Avant d'apprendre à *dimensionner des éléments soumis à des sollicitations composées* (C) :

6. connaître les phénomènes mis en jeu
7. maîtriser les méthodes de dimensionnement

Avant d'apprendre à *résoudre des problèmes avec mouvements rectilignes uniformes* (D) :

8. Notion de cinématique (vitesse, accélération...)

MECANIQUE APPLIQUEE ET RESISTANCE DES MATERIAUX

1. DEFINITIONS ET HYPOTHESES

1.1 Généralités

La Résistance des Matériaux (que nous désignerons maintenant par RDM) est la science du dimensionnement. Elle est issue d'une théorie plus générale, la Mécanique des Milieux Continus, qui permet de concevoir une pièce mécanique, un ouvrage d'art ou tout objet utilitaire, c'est à dire d'abord imaginer les formes et le squelette géométrique qui remplissent les fonctions demandées ; et ensuite déterminer les quantités de matière nécessaires et suffisantes pour réaliser ces formes en assurant une résistance sans dommage de l'objet à tous les efforts auxquels il sera soumis pendant son service. Ce dimensionnement fait appel à des calculs qui prévoient le comportement de l'objet dont la conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

1.2 Buts de la résistance des matériaux

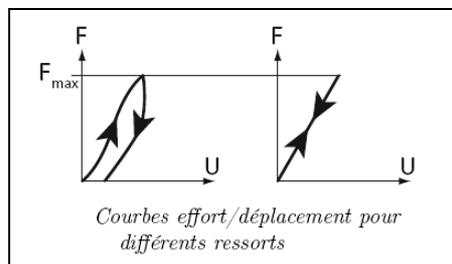
La résistance des matériaux a trois objectifs principaux :

- ◆ la connaissance des caractéristiques mécaniques des matériaux. (comportement sous l'effet d'une action mécanique)
- ◆ l'étude de la résistance des pièces mécaniques. (résistance ou rupture)
- ◆ l'étude de la déformation des pièces mécaniques.

1.3 Hypothèses

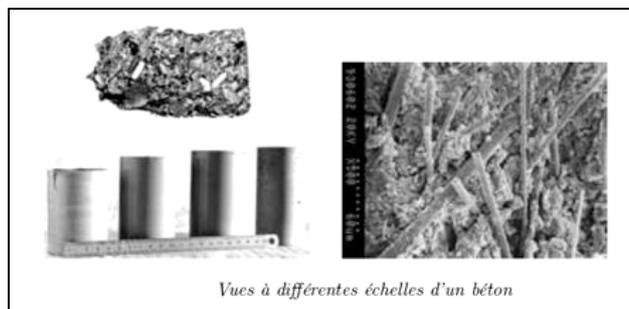
1.3.1. Le matériau :

- **Elastique linéaire**: Un matériau est dit élastique s'il retrouve entièrement sa forme ou son volume après avoir subi un cycle de charge/décharge quelconque.



Pour la courbe 1, le matériau n'est pas élastique, puisqu'il ne revient pas dans sa configuration initiale après la décharge. Par contre, la courbe 2 caractérise un comportement élastique linéaire : la relation liant F à U étant linéaire.

- **Homogénéité** : on supposera que tous les éléments de la matière, aussi petits soient ils, sont identiques. (hypothèse non applicable pour le béton ou le bois)



- **Isotropie** : on supposera qu'en tout point et dans toutes les directions, la matière a les mêmes propriétés mécaniques. (hypothèse non applicable pour le bois ou les matériaux composites)

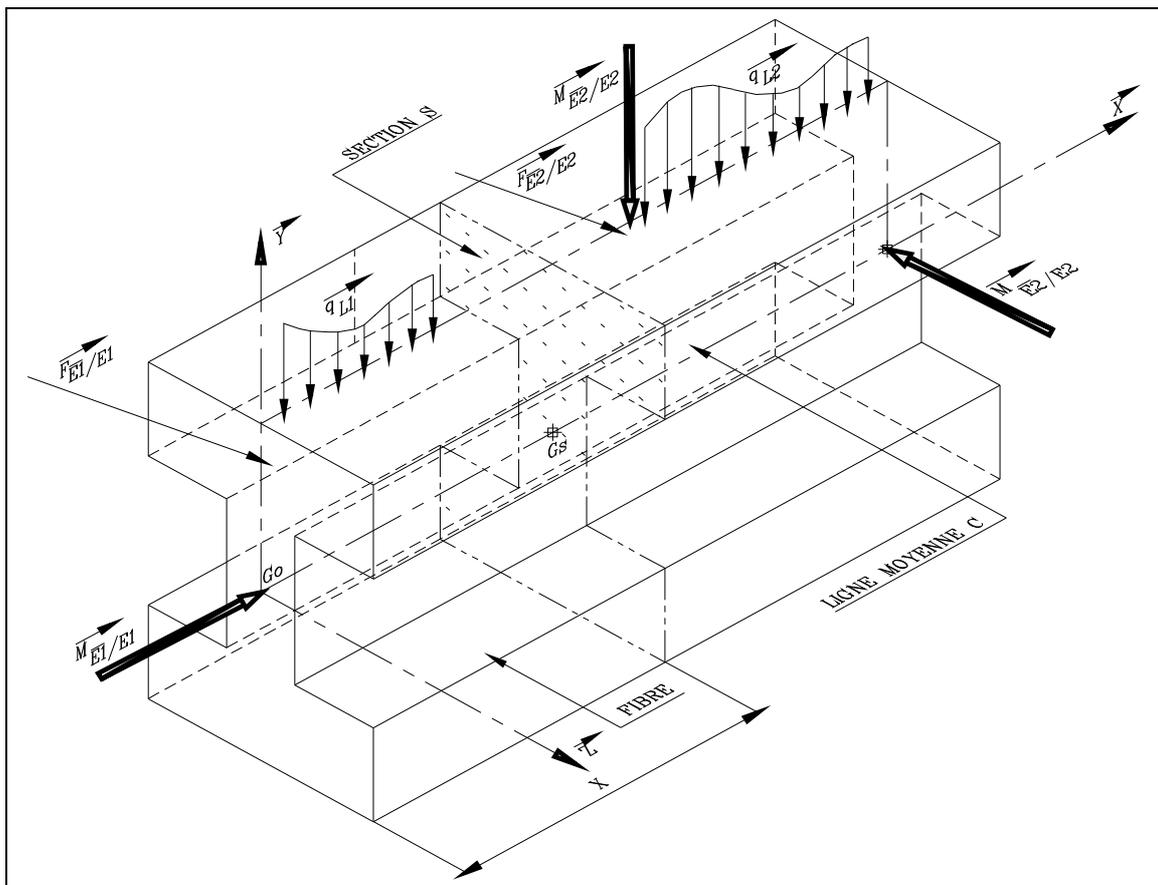
1.3.2 Notion de Poutre

La **RDM** étudie des pièces dont les formes sont relativement simples. Ces pièces sont désignées sous le terme de « poutres ».

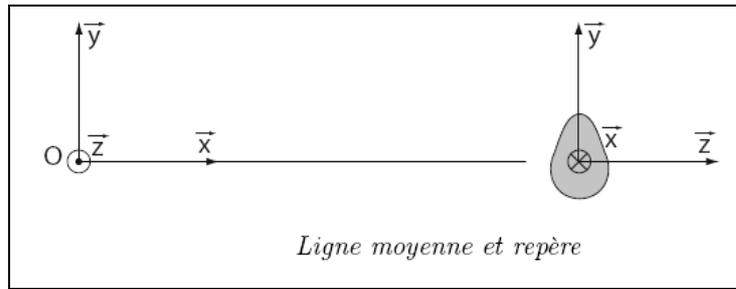
Poutre : on appelle *poutre* un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane (C) appelée *ligne moyenne*.

Les caractéristiques de la poutre sont :

- ligne moyenne droite ou à grand rayon de courbure.
- section droite (S) constante ou variant progressivement.
- grande longueur par rapport aux dimensions transversales. (en général 10 fois)
- existence d'un plan de symétrie. soit (\bar{X}, \bar{Y}) , soit (\bar{X}, \bar{Z}) .

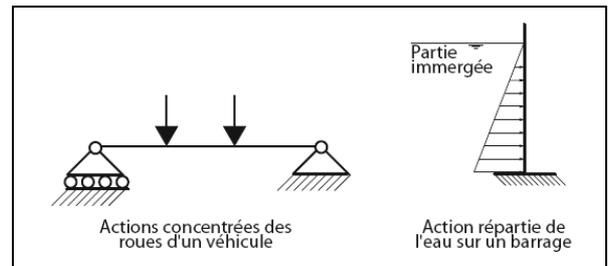
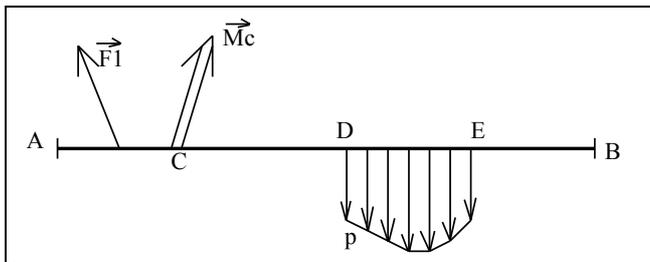


Pour décrire la poutre on peut donc la représenter par sa ligne moyenne et sa section droite

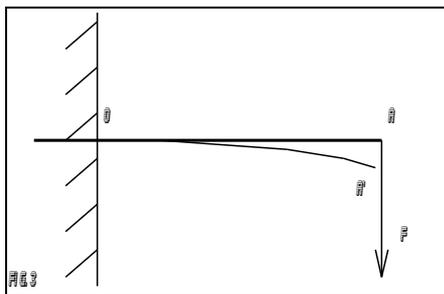


1.3.3 Les forces extérieures

- **Plan de symétrie** : les forces extérieures seront situées dans le plan de symétrie de la poutre ou alors disposées symétriquement par rapport à ce plan.
- **Types d'actions mécaniques extérieures** : deux types d'actions mécaniques peuvent s'exercer sur la poutre :
 - charges concentrées (\vec{F}_1 ou moment \vec{M}_C)
 - charges réparties p sur DE. (exprimées en N/m).



1.3.4 Les déformations

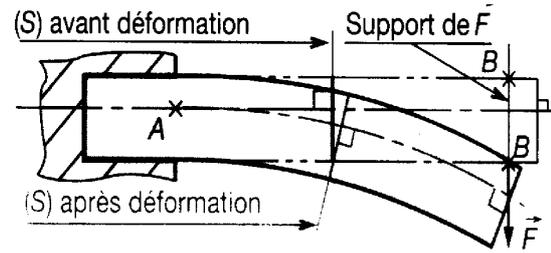
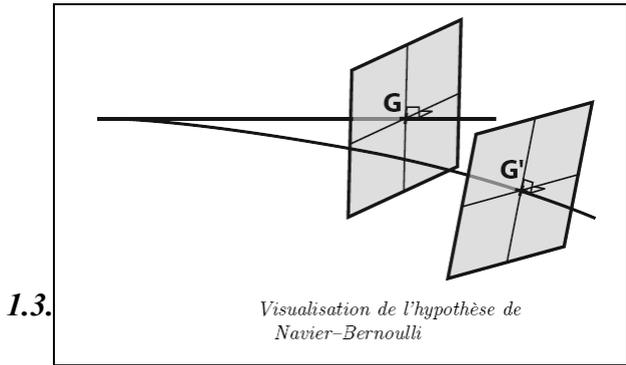


Les déformations étant petites devant les dimensions de la poutre, les actions s'exerçant sur celle-ci seront calculées à partir du principe fondamental de la statique.

Les supports des forces seront eux considérés comme constants.

1.3.5 Hypothèse Navier & Bernoulli :

Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation.

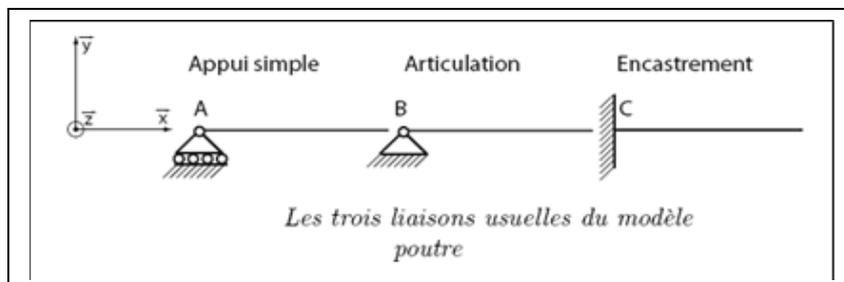


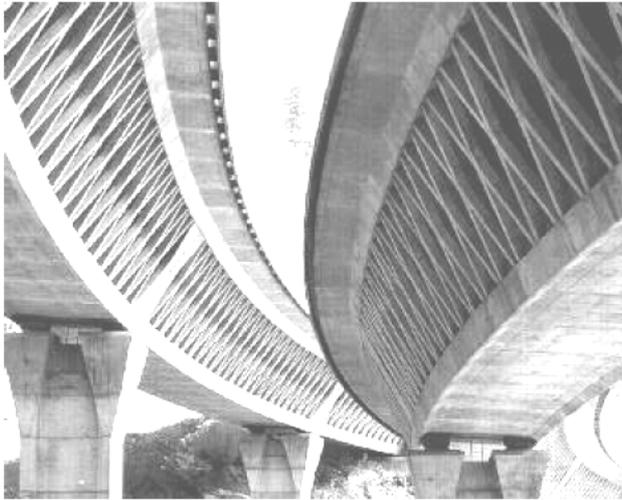
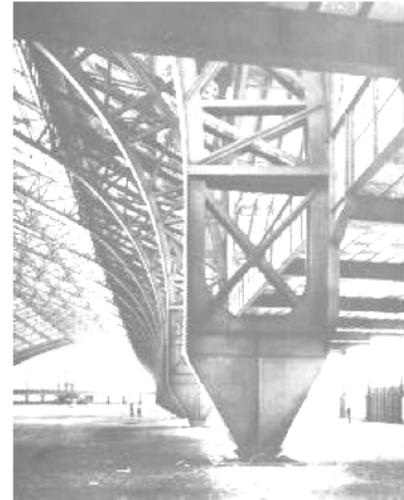
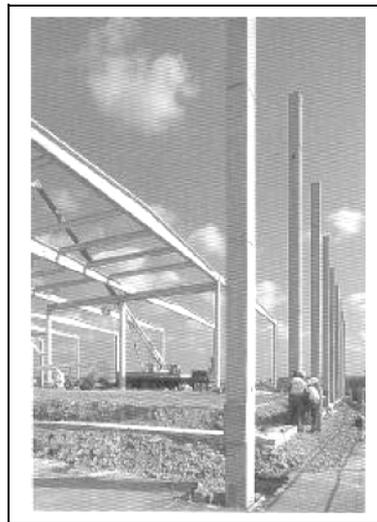
Etant donné un solide déformable, si sur une partie (Σ) de sa frontière on remplace une distribution des forces appliquées par une autre distribution, équivalente et agissant également sur (Σ) les sollicitations restent inchangées dans toute région du solide suffisamment éloignée de (Σ)

La conséquence directe de ce principe est que les résultats obtenus par un calcul de RDM sur une poutre ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des actions mécaniques extérieures concentrées et des liaisons. En pratique on peut considérer que les résultats sont valables à partir d'une distance égale à 2 fois la plus grande dimension transversale

1.3.7 Liaisons :

- a) *L'appui simple* - constitué, par exemple, par un rouleau cylindrique, donne lieu à une réaction de direction imposée passant par le point d'appui ; cette réaction est définie par une seule composante en résultante perpendiculaire au contact.
- b) *L'articulation* - constituée, pour les poutres métalliques, par une rotule comprise entre deux balanciers en acier moulé et, donne lieu à une réaction dont on ne connaît pas la direction, mais qui passe par le centre de la rotule ou par le centre de la section rétrécie ; cette réaction est définie par ses deux composantes suivant deux directions non parallèles du plan moyen.
- c) *L'encastrement* - a pour objet d'assurer l'invariabilité de la section d'extrémité d'une poutre ; la réaction d'appui comprend une force passant par le centre de gravité G de la section d'encastrement et contenue dans le plan moyen, et un moment normal au plan moyen ; la réaction d'appui est donc définie par trois composantes : les deux projections sur deux axes situés dans le plan moyen et la projection du moment sur l'axe normal au plan moyen.

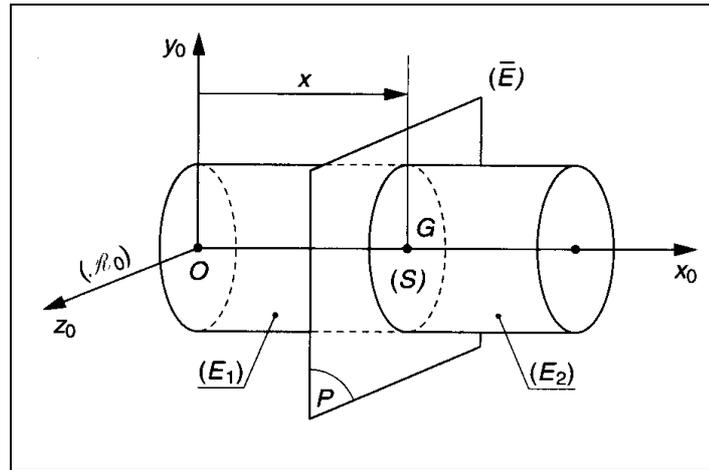


a) *appui simple* :b) *articulation* :d) *encastrement* :

1.2. Notion de contrainte - Vecteur contrainte :

Soit (E) le solide assimilé à une poutre et (\bar{E}) l'ensemble extérieur à (E) . $R_0 = (\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ est le repère lié à (E) tel que \bar{x}_0 est confondu avec la ligne moyenne. Considérons un plan (P) normal à \bar{x}_0 définissant la section droite (S) de (E) . Soit G le centre de surface de (S) , $\overrightarrow{OG} = x \cdot \bar{x}_0$ définissant la position de la section droite par rapport à R_0 .

La coupure fictive par le plan (P) partage la poutre en deux tronçons (E_1) et (E_2)



1.2.1 Définition du torseur de cohésion

Le torseur de cohésion $_{G_S}\{T_{coh}\}_{R_0}$ est le torseur associé à l'ensemble des actions mécaniques exercées par le tronçon (E₂) sur le tronçon (E₁) de la poutre dont les éléments de réduction sont exprimés au point G centre de la surface (S)

$$_{G_S}\{T_{coh}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{matrix} \right\}$$

Remarque :

Ces actions, non visibles, sont internes au matériau et lui permettent de garder son intégrité physique d'où le nom de cohésion.

Le torseur de cohésion est toujours le torseur des actions mécaniques exercées par le tronçon de droite (E₂) sur le tronçon de gauche (E₁)

\vec{R} et \vec{M}_G sont fonctions de l'abscisse x du centre de surface G de (S)

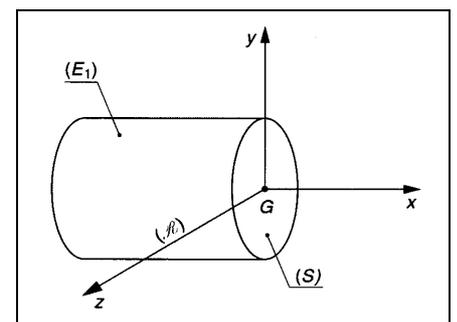
Pour simplifier les écritures, il n'y aura pas d'indices sur les éléments de réduction

1.2.2 Repère de définition des sollicitations

Soit R=(G, \vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) le repère local associé à la section droite fictive (S). Ce repère est tel que \vec{x} définit la normale extérieure à (S)

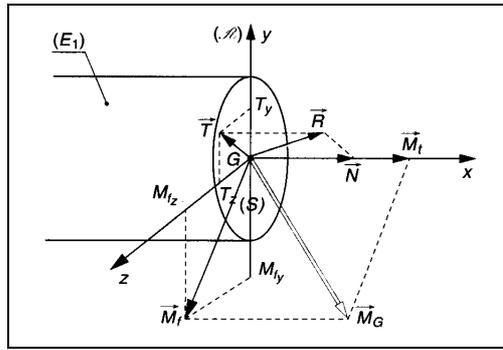
relative à (E₁). \vec{y} et \vec{z} appartiennent alors au plan (P) de la section (S).

$$\{T_{coh}\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{matrix} \right\}_{G,R}$$



1.2.3 Dénomination des composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion

$$\{T_{coh}\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \vec{R} = \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{M}_G = \vec{M}_t + \vec{M}_f \end{matrix} \right.$$



- Effort normal \vec{N} : projection de \vec{R} sur l'axe \vec{x}
- Effort tranchant \vec{T} : projection de \vec{R} sur la section droite (\vec{y}, \vec{z})
- Moment de torsion \vec{M}_t : projection de \vec{M}_G sur l'axe \vec{x}
- Moment de flexion \vec{M}_f : projection de \vec{M}_G sur la section droite (\vec{y}, \vec{z})

\vec{T} et \vec{M}_f n'ayant pas de direction privilégiée dans (\vec{y}, \vec{z}) il est préférable d'utiliser les composantes algébriques de ces vecteurs

$$\{T_{coh}\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{matrix} \right\}_R$$

\vec{R} | N : composante algébrique de \vec{N} sur \vec{x}
 T_y : composante algébrique de \vec{T} sur \vec{y}
 T_z : composante algébrique de \vec{T} sur \vec{z}

\vec{M}_G | M_t : composante algébrique de \vec{M}_t sur \vec{x}
 M_{fy} : composante algébrique de \vec{M}_f sur \vec{y}
 M_{fz} : composante algébrique de \vec{M}_f sur \vec{z}

1.2.4 Contrainte en un point M d'une section S

La contrainte caractérise les liaisons mécaniques internes au matériau (représentées par le torseur de cohésion $\{T_{coh}\}_R$ sur chaque **élément de surface** dS de la section S quelconque. On peut choisir dS aussi petit que l'on veut.

Unité : le N/mm² soit le Mpa
 Rappel : 1 Mpa = 10⁶ Pa = 1 N/mm² = environ 10 bar

1.2.4.1 Définitions

La contrainte \vec{C} est le rapport entre l'action mécanique $d\vec{F}$, qui s'exerce sur l'élément de surface dS de la section S

$$\vec{C} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \sigma \cdot \vec{x} + \tau_y \cdot \vec{y} + \tau_z \cdot \vec{z}$$

tel que | σ : contrainte normale
 τ_y et τ_z : contraintes tangentielles

1.2.4.2 Contrainte normale

Considérons un torseur de cohésion $_{GS}\{T_{coh}\}_R$ dont la résultante \vec{R} n'a qu'une composante N sur \vec{X} .

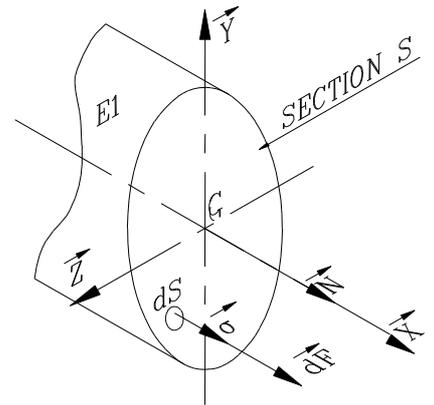
$$\vec{R} = N \cdot \vec{x} = \sum_S d\vec{F} = \sum_S \vec{C} \cdot dS = \sum_S \sigma \cdot \vec{x} \cdot dS$$

$$N = \sum_S \sigma \cdot dS$$

Si nous supposons une répartition constante de la contrainte σ sur S

$$\Rightarrow N = \sum_S \sigma \cdot dS = \sigma \cdot \sum_S dS = \sigma \cdot S$$

$$\sigma = \frac{N}{S}$$



1.2.4.3 Contraintes tangentielles

Considérons un torseur de cohésion $_{GS}\{T_{coh}\}_R$ dont la résultante \vec{R} n'a qu'une composante T_y sur \vec{Y} .

$$\vec{R} = T_z \cdot \vec{z} = \sum_S d\vec{F} = \sum_S \vec{C} \cdot dS = \sum_S \tau_z \cdot \vec{z} \cdot dS$$

$$T_z = \sum_S \tau_z \cdot dS$$

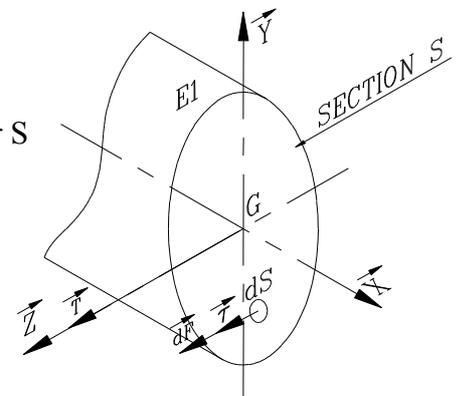
Si nous supposons une répartition constante de la contrainte τ_y sur S

$$\Rightarrow T_z = \sum_S \tau_z \cdot dS = \tau_z \cdot \sum_S dS = \tau_z \cdot S$$

$$\tau_z = \frac{T_z}{S}$$

de même

$$\tau_y = \frac{T_y}{S}$$



1.2.4.4 Relations entre torseur de cohésion et contraintes

$$\vec{R}_{E1 \rightarrow E2} = \vec{N} + \vec{T} = \sum_S (\vec{\sigma} + \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z) \cdot dS \quad \text{ou} \quad \vec{R}_{E1 \rightarrow E2} = \vec{N} + \vec{T} = (\vec{\sigma} + \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z) \cdot S$$

$$\vec{M}_{GE1/E2} = \sum_S \vec{GM} \wedge (\vec{\sigma} + \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z) \cdot dS$$

1.3 Notions sur les coefficients de sécurité

Pour qu'une structure (machine, véhicule...) puisse supporter en toute sécurité les charges normalement la sollicitent, il suffit qu'elle puisse résister à des charges plus élevées. La capacité à supporter ces charges constitue la résistance de la structure. Le coefficient de sécurité s est

$$s = \frac{\text{charge admissible}}{\text{charges exercées}} = \frac{\text{résistance réelle}}{\text{résistance nécessaire}}$$

La sécurité est obtenu si, sous charge

- les déformations du matériau restent élastiques
- la rupture du matériau n'est pas atteinte

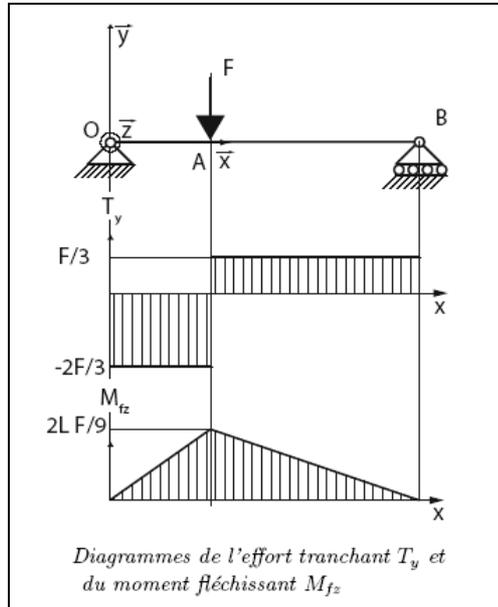
Donc :

$$s = \frac{R_e}{R_p} = \frac{\text{résistance élastique}}{\text{résistance pratique}} \quad \text{ou} \quad s = \frac{R_r}{R_p} = \frac{\text{résistance à la rupture}}{\text{résistance pratique}}$$

1.4. Diagrammes

La RDM est une science qui permet de dimensionner les pièces. Ainsi pour pouvoir appliquer des critères de dimensionnement (qui portent sur les grandeurs locales), il est utile de repérer la section de la poutre qui est la plus sollicitée. En effet, nous verrons que lorsque les efforts intérieurs sont maximaux alors il existe au moins un point de la section où les grandeurs locales le sont aussi. On utilise couramment des diagrammes de sollicitation qui permettent de visualiser rapidement les sections de la poutre les plus chargées.

Exemple d'un diagramme de l'effort tranchant T_y et du moment fléchissant M_{fz} .

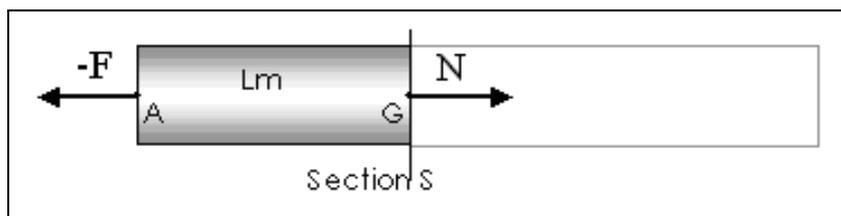
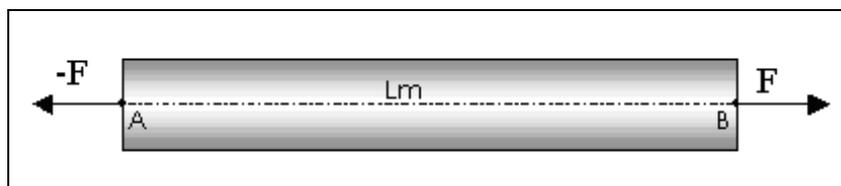


2. LES SOLLICITATIONS SIMPLES

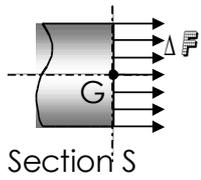
2.1 La Traction :

2.1.1 Définitions

Une poutre est sollicitée à la traction simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées, appliquées au centre de surface des sections extrêmes et qui tendent à l'allonger.



2.1.2 Contrainte normale :



Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de traction Δf parallèle à la ligne moyenne.

Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

- σ : contrainte normale en Mpa ou en N/mm²
- N : effort normal en N
- S : aire de la section droite en mm²

Condition de résistance :

$$R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

- Soient : R_e la résistance élastique du matériau (en Mpa)
- s un coefficient de sécurité ($s > 1$);
- R_{pe} la résistance pratique à l'extension

$$\sigma \leq R_{pe}$$

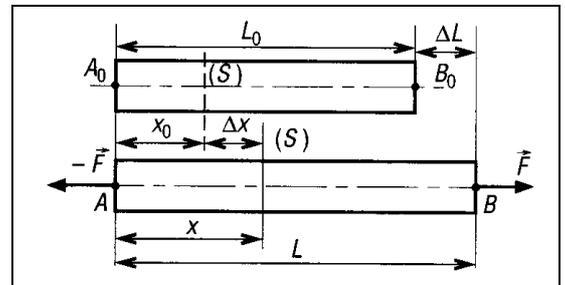
Alors, la condition de résistance s'écrit :

2.1.3 Déformation :

Soient :

- L_0 : longueur initiale de la poutre (en mm)
- L : longueur de la poutre après déformation (en mm)
- $\Delta L = L - L_0$: Allongement de la poutre (en mm)
- ϵ : Allongement relatif de la poutre (sans unité)

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$



En déformation élastique, la contrainte σ varie linéairement en fonction de l'allongement relatif ϵ .

Loi de Hooke : $\sigma = E \epsilon$

- σ : contrainte normale en N/mm²
- E : module d'élasticité longitudinale (module d'Young) en Mpa
- ϵ : allongement relatif (pas d'unité)

2.1.4 Phénomène de concentration de contrainte :

Lorsqu'une poutre possède une variation brusque de sa section, les hypothèses de la Résistance des matériaux ne sont plus vérifiées. En traction, la répartition de la contrainte normale σ n'est plus uniforme. L'essai de traction ci-dessous, a été réalisé sur une poutre de section rectangulaire, percée d'un trou cylindrique :



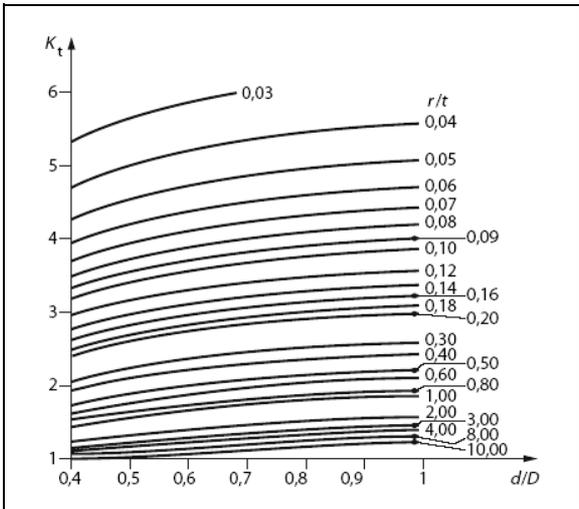
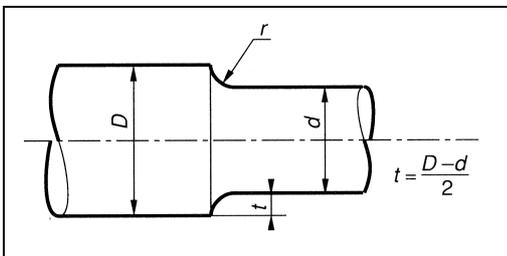
Loin du perçage, la contrainte normale vaut $4,15 \cdot 10^{-3}$ MPa. Par contre, à proximité de ce même perçage la contrainte normale grimpe à $9,138 \cdot 10^{-3}$ MPa, soit une peu plus du double de la valeur précédente.

Pour tenir compte de ce phénomène, nous introduisons la notion de Coefficient de concentration de contrainte : K_t

$$\sigma_{no\ min\ ale} = \frac{N}{S} \text{ d'où } \sigma_{max\ i} = K_t \cdot \sigma_{no\ min\ ale}$$

Condition de résistance : $\sigma_{max\ i} < R_{pe}$

Arbre épaulé en traction



Exemple : $D=100, d=64, r=5$
 $N=5000 \text{ daN}$

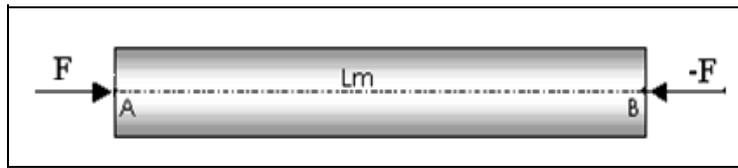
$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{D} &= \frac{64}{100} = 0,64 \\ \frac{r}{t} &= \frac{2 \cdot r}{D - d} = \frac{10}{100 - 64} = 0,278 \end{aligned} \right\} K_t = 2,1$$

$$\sigma_{no\ min\ ale} = \frac{4 \times 5000}{\pi \times 64^2} = 1,55 \text{ daN / m}^2$$

$$\sigma_{max\ i} = K_t \times \sigma_{no\ min\ ale} = 2,1 \times 1,55 = 3,26 \text{ daN / m}^2$$

2.2. La compression simple

Une poutre est sollicitée à la compression simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées, appliquées au centre de surface des sections extrêmes et qui tendent à la raccourcir.



A l'exception de la fonte et du béton, tous les matériaux ont quasiment le même comportement en traction qu'en compression.

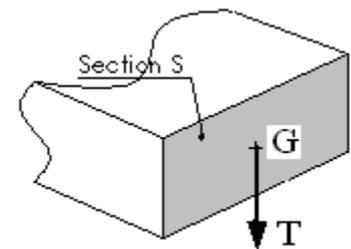
Les relations vues en traction pourront être également appliquées à la compression.

2.3 Le Cisaillement :

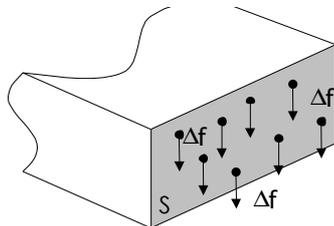
2.3.1 Définitions :

Une poutre est sollicitée en cisaillement lorsque sa section S est soumise à une résultante T appliquée en G (barycentre de la section) et contenue dans le plan (S).

T est appelé effort tranchant.



2.3.2 Contrainte de cisaillement :



Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de cisaillement Δf contenu dans le plan (S).

Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$\tau = \frac{T}{S}$; τ : contrainte tangentielle en Mpa ou N/mm²

T : effort tranchant en N

S : aire de la section droite cisailée en mm²

2.3.3 Condition de résistance :

Soient : R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa) ;

s un coefficient de sécurité ;

$\tau_{adm} = R_{pg}$ la résistance pratique au cisaillement, avec $R_{pg} = R_{eg}/s$

Alors, la condition de résistance s'écrit :

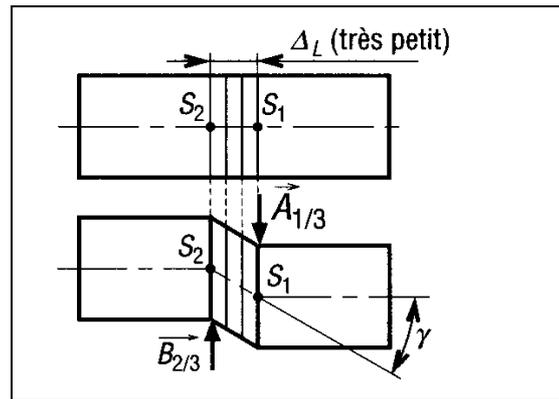
$$\tau \leq \tau_{adm}$$

2.3.4 Déformation :

En déformation élastique, la contrainte de cisaillement τ varie linéairement en fonction de l'angle de glissement γ .

$$\tau = G \gamma$$

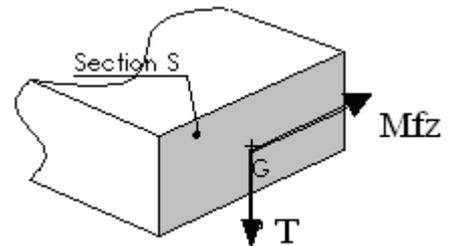
τ : contrainte tangentielle en N/mm²
 G : module d'élasticité transversal en Mpa
 γ : angle de glissement en radians



2.4. La flexion simple :

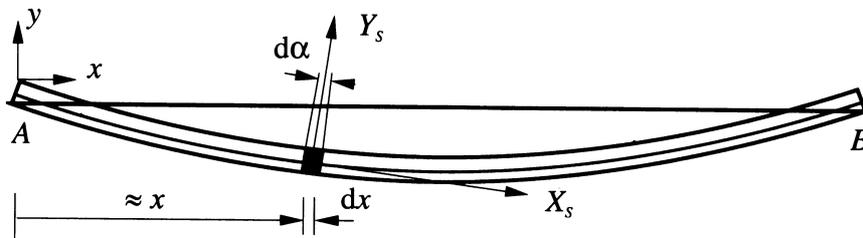
2.4.1 Définitions :

Une poutre est sollicitée en flexion lorsque sa section S est soumise à une action au barycentre composé d'une résultante T contenue dans le plan de symétrie et un moment M_{fz} perpendiculaire à ce dernier. M_{fz} est appelé moment fléchissant, ou moment de flexion.

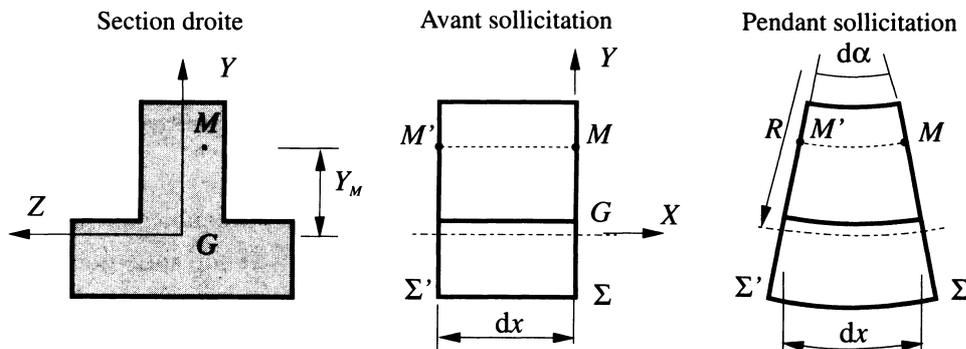


2.4.2 Contraintes normales

La poutre étant sollicitée en flexion simple, la ligne caractéristique peut être assimilée à un arc de cercle de rayon R appelé *rayon de courbure*



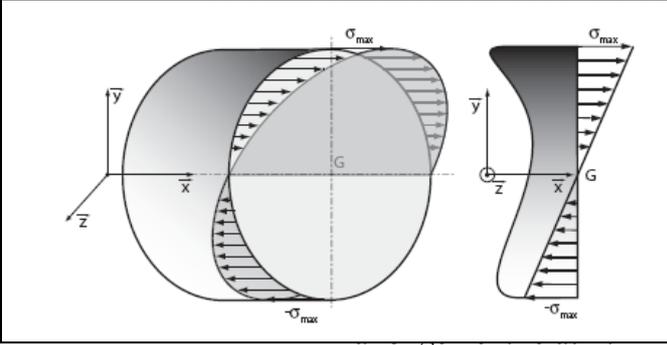
Au cours de la déformation, le tronçon considéré initialement prismatique se transforme en portion de tore de rayon moyen R intercepté d'un angle $d\alpha$



MM' est une fibre du tronçon joignant deux points homologues des sections Σ et Σ'

Les fibres situées dans le plan (G, \vec{x}, \vec{z}) ne varient pas et sont appelées *fibres neutres*

Les fibres au dessus de G ($Y > 0$) se raccourcissent et celles en dessous de G ($Y < 0$) s'allongent



Loi de la fibre $M'M$

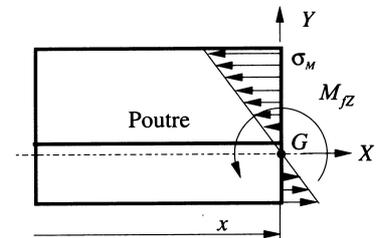
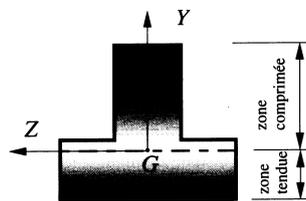
dans le repère local $R = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\epsilon = -Y_M \frac{d\alpha}{dx}$$

2.4.4 Expression de la contrainte normale

En exprimant la loi de Hooke définie par la relation $\sigma = \epsilon.E$, on obtient :

$$\sigma_M = -E.Y_M \frac{d\alpha}{dx}$$

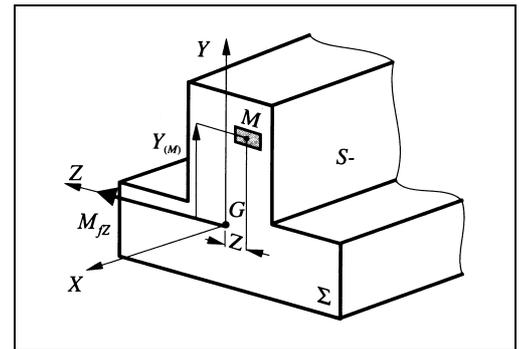


- la contrainte normale est nulle sur la fibre neutre
- le signe s'inverse à la traversée du plan (G, \vec{x}, \vec{z})
- la répartition est linéaire sur la section droite
- le point de la section le plus sollicité est celui qui est le plus éloigné de la fibre neutre

2.4.5 Relation entre contrainte normale et moment fléchissant

Une coupure est effectuée au niveau de la section droite Σ
Soit un point M de coordonnées (X_M, Y_M, Z_M) et $d\Sigma$ un élément de surface entourant M

Le moment fléchissant M_{fz} est la somme des moments en G des actions mécaniques élémentaires transmises par les éléments de surface $d\Sigma$ constituant le section droite avec



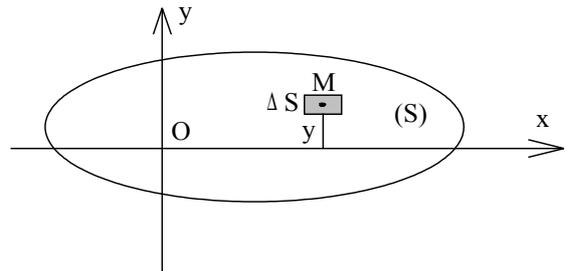
$$dM_{fz} = -Y \sigma_M . d\Sigma$$

$$M_{fz} = - \int_{\Sigma} Y \sigma_M . d\Sigma = - \int_{\Sigma} Y^2 E . \frac{d\alpha}{dx} . d\Sigma = - E . \frac{d\alpha}{dx} \int_{\Sigma} Y^2 . d\Sigma = - \frac{\sigma_M}{Y_M} \int_{\Sigma} Y^2 . d\Sigma \text{ donc } \sigma_M = - \frac{M_{fz} . Y_M}{\int_{\Sigma} Y^2 . d\Sigma}$$

2.4.6 Moment quadratique

2.4.6.1 Définitions

1. Soit (S) une surface plane et un repère orthonormé (O, x,y) associé.



Le moment quadratique élémentaire de ΔS par rapport à (O, x), noté ΔI_{Ox} est défini par :

$$\Delta I_{Ox} = y^2 \cdot \Delta S$$

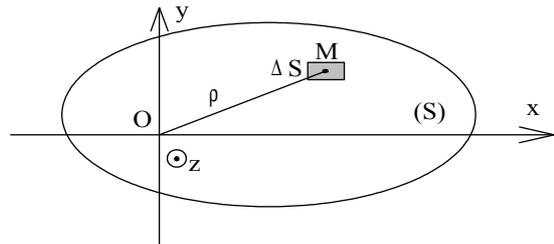
et pour l'ensemble de la surface (S) :

$$I_{Ox} = \sum_{(S)} y^2 \cdot \Delta S$$

Remarques :

- * L'unité de moment quadratique est le mm⁴ (ou le m⁴)
- * Un moment quadratique est toujours positif.
- * Le moment quadratique dépend uniquement de la géométrie de la section droite

2. Soit (S) une surface plane et un repère orthonormé (O,x,y,z) associé.



Le moment quadratique polaire élémentaire de ΔS par rapport à (O, z̄) perpendiculaire en O au plan de la figure et noté ΔI_O est défini par :

$$\Delta I_O = \rho^2 \cdot \Delta S$$

et pour l'ensemble de la surface (S) :

$$I_O = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S$$

Propriété :

Considérons le moment quadratique polaire I_O de la surface (S) par rapport à (O, z̄) perpendiculaire en O à son plan.

Notons : $I_O = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S$

Soient x et y les coordonnées du point M. On a : $\rho^2 = x^2 + y^2$

On a donc : $I_O = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S = \sum_{(S)} x^2 \cdot \Delta S + \sum_{(S)} y^2 \cdot \Delta S$

$I_O = I_{Ox} + I_{Oy}$

Soit :

2.4.6.2 Théorème de Huygens

Le moment quadratique d'une section par rapport à un axe contenu dans son plan est égal au moment quadratique de cette section par rapport à un axe parallèle au premier et passant par son barycentre, augmenté du produit de l'aire de la section par le carré de la distance entre les deux axes.

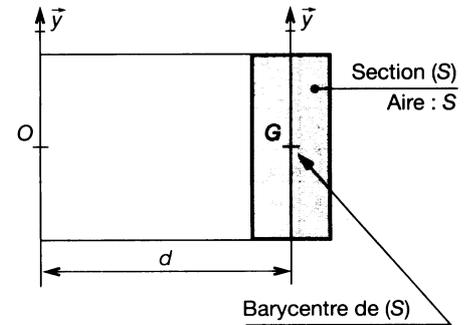
$$I_{Oy} = I_{Gy} + S \cdot d^2$$

I_{Oy} : moment quadratique de (S) par rapport à (O, \vec{y}) (mm⁴)

I_{Gy} : moment quadratique de (S) par rapport à (G, \vec{y}) (mm⁴)

S : aire de la section (S) (mm²)

d : distance entre les axes (O, \vec{y}) et (G, \vec{y}) (mm)



Exemple : calculer le moment quadratique de l'équerre de dimensions données dans les schémas ci-dessous :

Décomposer (S) en deux rectangles (1) AKEF et (2) BCDK

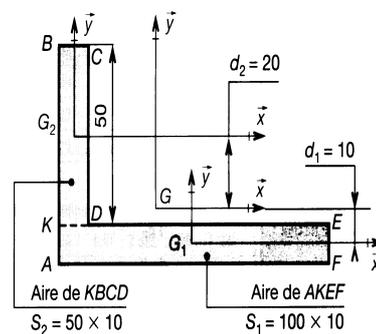
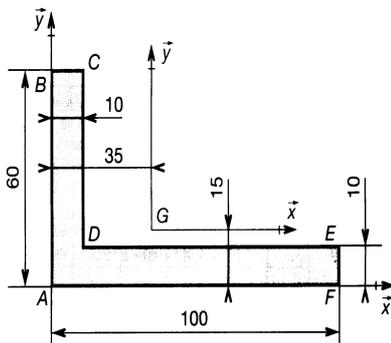
$$I_{1G_1x} = \frac{100 \times 10^3}{12} ;$$

$$I_{1Gx} = I_{1G_1x} + S_1 \cdot d^2 = \frac{100 \cdot 10^3}{12} + (100 \cdot 10) \cdot 10^2 = \frac{10^5}{12} + 10^5$$

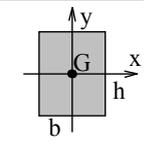
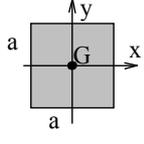
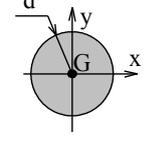
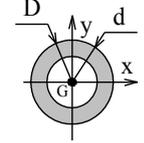
$$I_{2G_2x} = \frac{10 \cdot 50^3}{12}$$

$$I_{2Gx} = I_{2G_2x} + S_2 \cdot d^2 = \frac{10 \cdot 50^3}{12} + (50 \cdot 10) \cdot 20^2 = \frac{125 \cdot 10^4}{12} + 20 \cdot 10^4$$

$$I_{Gx} = I_{1Gx} + I_{2Gx} = 41,2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$



2.4.6.3 Moments quadratiques usuels

	I_{Gx}	I_{Gy}	$I_G = I_o$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$

2.4.7 Module de flexion

On appelle module de flexion la quantité $\frac{IGZ}{Y_{max}}$ en mm^3 . C'est une caractéristique courante des profilés.

2.4.8 Contrainte normale maximale

σ_{max} = contrainte normale maximale (Mpa)

$\frac{IGZ}{Y_{max}}$ = module de flexion (mm^3)

Mfz = moment de flexion sur \vec{z} (N.mm)

$$\sigma_{max} = - \frac{Mfz}{\frac{IGZ}{Y_{max}}}$$

2.4.9 Condition de résistance à la contrainte normale

R_{pe} : contrainte pratique de limite élastique (Mpa) = $\frac{Re}{s}$

Re : contrainte de limite élastique (Mpa)

s : coefficient de sécurité

σ_{max} = contrainte normale maximale (Mpa)

kt : coefficient de concentration de contrainte

$$kt \cdot \sigma_{max} \leq R_{pe}$$

2.4.10 Équation de la déformée

Soit une poutre AB sollicitée en flexion simple et $(A, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un repère d'étude global qui ne se déplace pas lorsque la poutre se déforme. \mathcal{C} est la ligne caractéristique de la poutre déformée considérée comme la graphe de la fonction $y = f(x)$

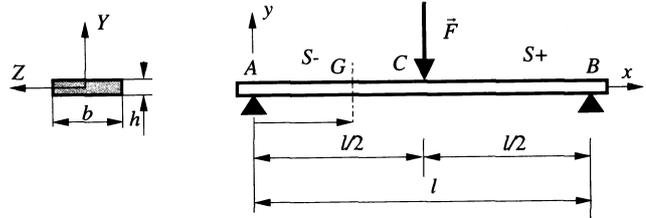
$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E \cdot I_{GZ}}$$

l'équation de la déformée s'obtient par intégration successive de y''

Exemple

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E \cdot I_{GZ}} = \frac{-F \cdot x}{E \cdot I_{GZ}} = \frac{-F \cdot x}{2 \cdot E \cdot I_{GZ}}$$

$$2 \cdot E \cdot I_{GZ} \cdot y'' = -F \cdot x$$



première intégration

$$2 \cdot E \cdot I_{GZ} \cdot y' = -F \cdot \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$4 \cdot E \cdot I_{GZ} \cdot y' = -F \cdot x^2 + C_1$$

recherche de C_1 : $y' = 0$ pour $x = l/2$ (symétrie de la déformée)

$$0 = -F \cdot \frac{l^2}{4} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{F \cdot l^2}{4}$$

$$4 \cdot E \cdot I_{GZ} \cdot y' = -F \cdot x^2 + \frac{F \cdot l^2}{4}$$

deuxième intégration :

$$4 \cdot E \cdot I_{GZ} \cdot y = -F \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{F \cdot l^2}{4} \cdot x + C_2 = -\frac{F \cdot x^3}{3} + \frac{F \cdot l^2 \cdot x}{4} + C_2 = \frac{-4 \cdot F \cdot x^3 + 3 \cdot F \cdot l^2 \cdot x}{12} + C_2$$

recherche de C_2 : $y = 0$ pour $x = 0$ (appui ponctuel d'axe \bar{y}) donc $C_2 = 0$

$$y = \frac{-4 \cdot F \cdot x^3 + 3 \cdot F \cdot l^2 \cdot x}{48 \cdot E \cdot I_{GZ}} \quad y \text{ est maxi pour } x = l/2 \text{ (symétrie de la déformée)}$$

$$y = \frac{-4 \cdot F \cdot \frac{l^3}{8} + 3 \cdot F \cdot l^2 \cdot \frac{l}{2}}{48 \cdot E \cdot I_{GZ}} = \frac{F \cdot (-\frac{4l^3}{8} + \frac{3l^3}{2})}{48 \cdot E \cdot I_{GZ}} = \frac{F \cdot (-\frac{l^3}{2} + \frac{3l^3}{2})}{48 \cdot E \cdot I_{GZ}} = \frac{F \cdot (\frac{2l^3}{2})}{48 \cdot E \cdot I_{GZ}}$$

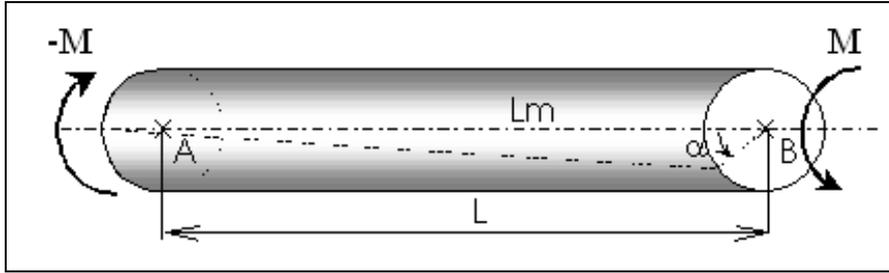
$$y = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_{GZ}}$$

La ligne moyenne après déformation est aussi appelée déformée et la valeur de la déformée en un point est appelée flèche.

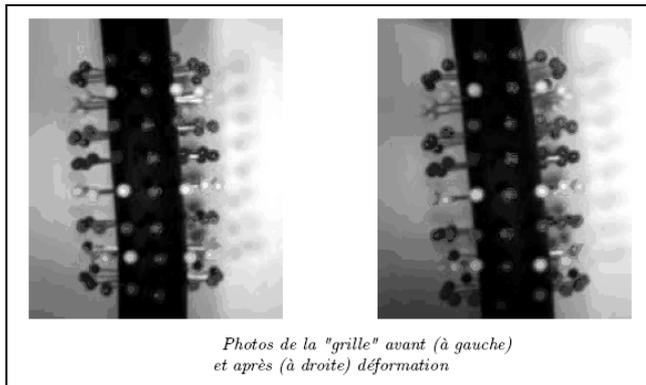
2.5. La torsion simple :

2.5.1 Définitions

Une poutre est sollicitée en torsion lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux moments égaux et opposés, portés par la ligne moyenne Lm.



Etude d'un barreau cylindrique :



Le moment M est appelé moment de torsion, et est noté M_t . Soit α l'angle de rotation entre les deux extrémités de la poutre.

2.5.2 Contrainte tangentielle de torsion :

Soit θ = angle unitaire de torsion.

$\tau = G\theta\rho$

- τ : contrainte tangentielle en N/mm²
- G : module d'élasticité transversal en Mpa
- θ : angle unitaire de torsion en rad/mm
- ρ : rayon GM en mm

$M_t = G\theta I_0$

- M_t : Moment de torsion en N.mm
- G : module d'élasticité transversal en Mpa
- I_0 : moment quadratique par rapport au point G en mm⁴

$$\text{d'où : } \tau = \frac{M_t}{\frac{I_0}{\rho}}$$

2.5.3 Condition de résistance :

Soient :

- ☞ R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa)
- ☞ s un coefficient de sécurité ;
- ☞ R_{pg} la résistance pratique au cisaillement, avec $R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$

$$\tau_{\max} \leq R$$

2.5.4 Déformation

L'angle unitaire de torsion θ est caractéristique de la déformation. Sa méthode de calcul dépend de la géométrie de la section (forme, section ouverte ou fermée, etc...). Ce calcul ne sera pas abordé dans ce cours.

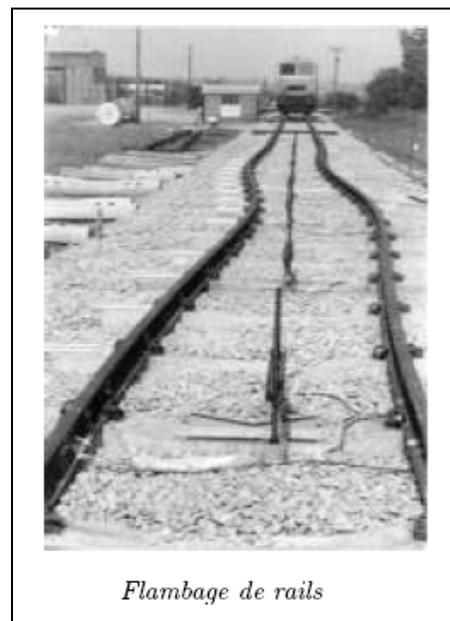
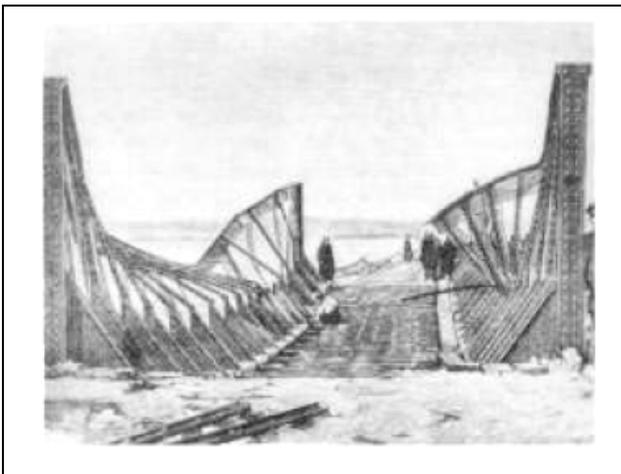
2.6 Le Flambage

2.6.1 Définitions

Le flambage ou flambement d'une poutre est caractérisé par l'apparition brusque d'un changement de forme dans une direction différente de celle des forces de sollicitation. C'est un phénomène qui conduit souvent à la ruine de la structure. À titre d'illustration, on propose quelques exemples ci-dessous :

Sur la figure de gauche, flambement d'ensemble de la membrure supérieure des poutres en treillis d'un pont de chemin de fer

Sur la figure de droite, flambage de rails de chemins de fer par effet thermiques.



Si l'on étudie expérimentalement comment varie la flèche transversale d'une poutre comprimée par une force axiale, on obtient, en fonction de la force, une courbe dont l'allure est la suivante : la flèche, d'abord nulle, correspond à la théorie de la compression simple, mais, pour une charge particulière, appelée charge

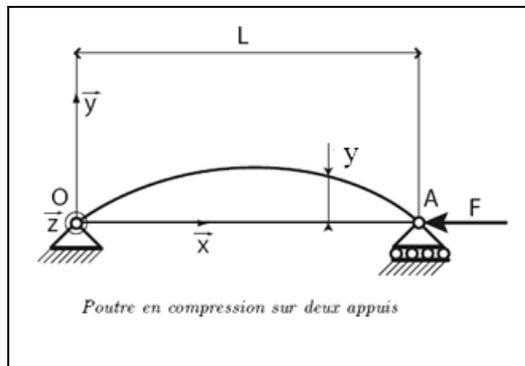
critique, la flèche croît brusquement à la suite d'une instabilité ; c'est le flambement, qui peut entraîner la ruine de la poutre. La solution analytique de ce problème a été donnée notamment par Leonhard Euler en 1750. Le phénomène du flambement est souvent associé à l'effort de compression et il constitue un des critères de dimensionnement des poteaux, des colonnes et des barres comprimées.

2.6.2 Flambage d'Euler :

Pour étudier le flambage, il faut abandonner une des hypothèses fondamentales de la RDM. En effet, la théorie du flambage d'Euler repose sur le fait que lors du flambement de la poutre, on a des déplacements qui ne sont plus petits et ne peuvent donc plus être négligés. Ainsi pour écrire les équations d'équilibre de la poutre, qui permettent de calculer le torseur des efforts intérieurs, on ne peut plus identifier la configuration initiale et la configuration déformée de la poutre. Nous allons donc écrire les équations usuelles issues du Principe Fondamental de la Statique sur la configuration déformée de la poutre. Considérons alors le cas d'une poutre initialement droite soumise à un effort de compression F, et dont les conditions aux limites sont :

- en O, une articulation,

- en A, un appui simple.



Faisons l'hypothèse qu'il existe une petite flèche y de la poutre (début de flambage), on se retrouve en sollicitation composée (compression + flexion). On peut écrire en flexion :

$$Mf = E \cdot I_G \cdot y''(x)$$

mais le moment de flexion dépend de la charge F et de la flèche y, à savoir :

$$Mf = - F \cdot y(x)$$

On aboutit alors à l'équation différentielle suivante :

$$E \cdot I_G \cdot y''(x) + F \cdot y(x) = 0$$

Mathématiquement on peut donc trouver des solutions de la forme :

$$y(x) = \alpha \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \quad \text{avec } \alpha \text{ constante (flèche de la section médiane)}$$

Cette existence de solution confirme notre hypothèse de départ, à savoir, qu'il peut y avoir déformation (flambage) sous certaines charges dites critiques. Celles-ci dépendent de n et y.

On obtient en remplaçant :

$$F_c = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_G}{L^2} \text{ charge critique d'Euler}$$

Prenons la première de celles-ci (n=1), trois cas sont à envisager :

- $F_{réel} < F_c$: La poutre reste droite, elle travaille en compression. On est en équilibre stable.
- $F_{réel} = F_c$: C'est l'incertitude, la poutre peut rester droite ou flamber jusqu'à la valeur α . On est en équilibre neutre.
- $F_{réel} > F_c$: La poutre a de très grandes chances de flamber. On est en équilibre instable.

Nous venons d'étudier le cas d'une poutre articulée à ses deux extrémités, on pourrait en faire de même avec d'autres types de liaison aux extrémités (libre, encastrement,...) seul la longueur à prendre en compte demeure alors changée.

2.6.3 Contrainte critique.

Nous sommes aussi en compression, on peut donc écrire :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{S} = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_G}{S \cdot L^2}$$

On introduit alors le rayon de giration et l'élanement, à savoir :

rayon de giration $r = \sqrt{\frac{I_G}{S}}$ et élanement $\lambda = \frac{L}{r}$

$$\sigma_c = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E \cdot r^2}{L^2}$$

$$\sigma_c = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Remarque : l'élanement caractérise la flexibilité d'une poutre et permet une comparaison de celles-ci.

2.6.4 Méthodes de calcul. (Poutres en Acier)

2.6.4.1 Méthode Euler - Rankine.

C'est une méthode de calcul simplifiée valable si l'on n'atteint jamais la 1^{ère} charge critique. On définit les grandeurs suivantes :

- F_{adm} charge admissible
- R_{pc} résistance pratique en compression
- s coefficient de sécurité

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{R_e}} \quad \text{élancement critique}$$

$$\lambda = \frac{L_e}{r} \quad \text{élancement (} L_e \text{ : longueur effective, dépend du type d'extrémité)}$$

la relation de base est la suivante : $2 \cdot s = \frac{F_c}{F_{adm}} = \frac{2 \cdot R_e}{R_{pc}}$

on travaille ensuite à l'aide du tableau ci-dessous, suivant l'élancement de la poutre.

Poutres Courtes $\lambda < 20$	Poutres Moyennes $20 \leq \lambda \leq 100$	Poutres Longues $\lambda > 100$
calcul en compression	calcul de Rankine	calcul d'Euler
$F_{adm} = R_{pc} \cdot s$	$F_{adm} = \frac{R_{pc} \cdot s}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$	$F_{adm} = \frac{R_{pc} \cdot s}{2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$

Note : Le flambage est un calcul avec des applications spécifiques dans la vérification et le dimensionnement des poteaux des structures métalliques.

3. Les Essais

3.1 Essai de traction

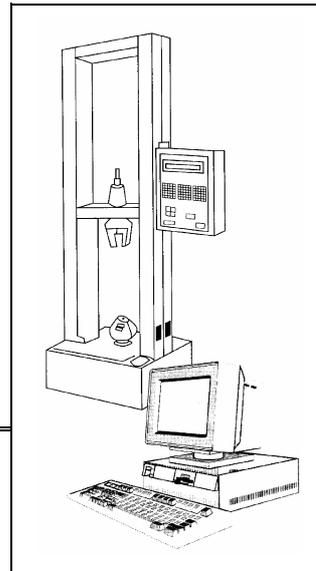
3.1.1 Définitions

L'essai de traction permet, à lui seul, de définir les caractéristiques mécaniques courantes des matériaux. Les résultats issus de cet essai, permettent de prévoir le comportement d'une pièce sollicitée en Cisaillement, Traction / Compression et Flexion.

Il consiste à exercer sur une éprouvette normalisée (pièce de dimensions normalisées fabriquée dans le matériau à tester), cylindrique ou parallélépipédique (plate), deux actions mécaniques et opposées qui vont la déformer progressivement puis la rompre



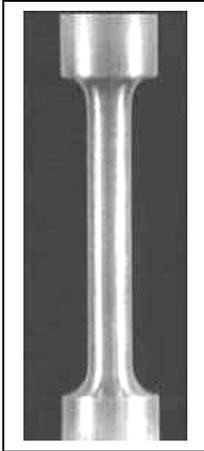
CDC-GM



ction métallique

Machine de traction

Schéma d'une machine de traction

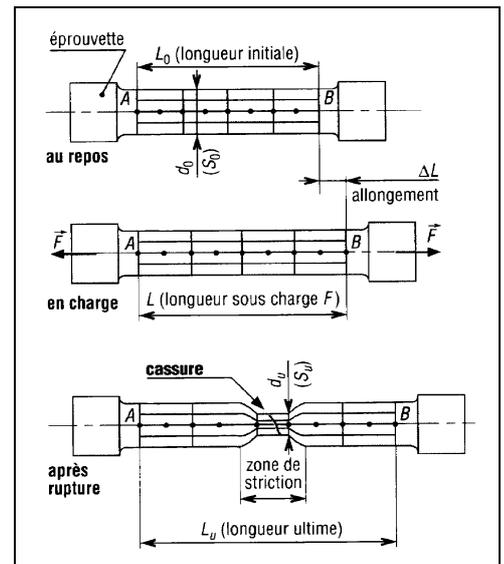
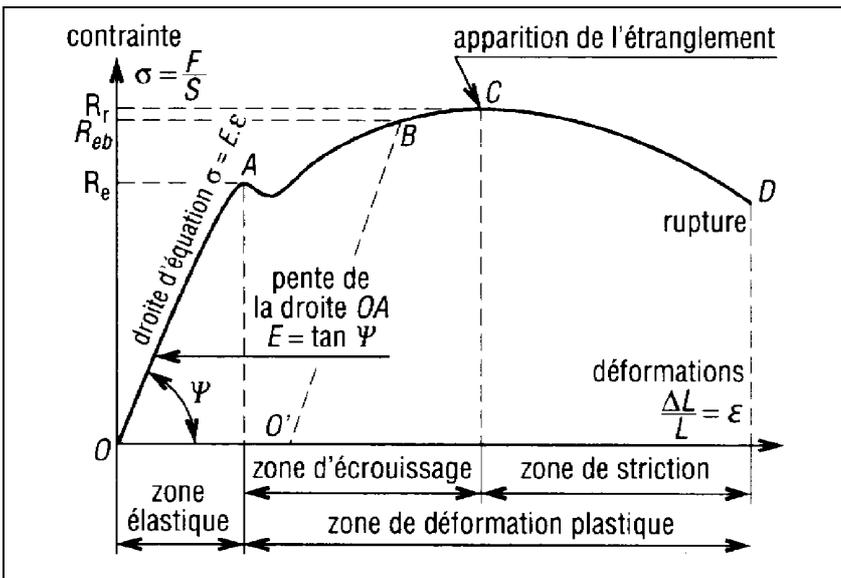


Eprouvette

Eprouvette installée entre les mors de machine de traction

3.1.2 Courbes de contraintes et déformation

Pour un grand nombre de matériaux, comme les alliages, les courbes obtenues présentent une zone, appelée domaine élastique où le graphe est une droite (segment OA). Pour tous les points de cette droite, la déformation (ou l'allongement) est proportionnelle à la contrainte et le matériau est élastique.



3.1.3 Module d'élasticité longitudinale E (N/mm²) ou Mpa

Il caractérise la pente de la droite de proportionnalité précédente et l'élasticité du matériau testé. Plus E est grand, plus le matériau est rigide et inversement.

Matériau	Fontes	Aciers	Cuivre	Aluminium	Tungstène
E (MPa)	60000à160000	200000	120000	70000	400000

3.1.4 Loi de Hooke

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \epsilon$$

Cette loi, ou équation de la droite OA, traduit la proportionnalité : σ en MPa, E en MPa et ϵ sans unité).

Unités : **σ en Mpa** ; contrainte de traction
E en Mpa ; module d'élasticité longitudinale
 ϵ sans unité ; allongement élastique unitaire

3.1.5 Déformations élastiques

Le comportement, des aciers donné par la courbe de traction, a permis pour différents matériaux d'établir la relation :

$$\frac{N}{S} = E \frac{\Delta l}{l} ; \epsilon = \frac{\Delta l}{l} \text{ est l'allongement élastique unitaire suivant } x$$

Unités : N en Newton
 S en mm²
 E en MPa (N/mm²)
 Δl et l en mm.

Lors de cet essai, on met aussi en évidence une autre caractéristique de l'élasticité ; il existe un rapport constant entre la contraction relative transversale ($\Delta d / d$) et l'allongement relatif longitudinal ($\Delta l / l$). On peut écrire :

$$\frac{\Delta d}{d} = \nu \frac{\Delta l}{l}$$

Unités : ν sans unité
 d et l en mm.

ν est aussi une caractéristique du matériau (**coefficient de Poisson**), il est de l'ordre de 0,3 pour les métaux.

3.1.6 Limite élastique Re (Mpa)

Elle marque la fin du domaine élastique (au point A). Pour les valeurs supérieures le matériau ne se déforme plus élastiquement mais plastiquement (l'éprouvette ne retrouve plus ses dimensions initiales après "déchargement", il subsiste un allongement permanent).

3.1.7 Limite conventionnelle d'élasticité Re 0,2 MPa

On utilise cette détermination pour les courbes de traction où le palier de fin de limite élastique n'apparaît pas nettement. Pour la mesure de Re on tolère une légère déformation permanente de 0,2% ($A\% = 0,2$).

3.1.8 Limite maximale Rm (Mpa)

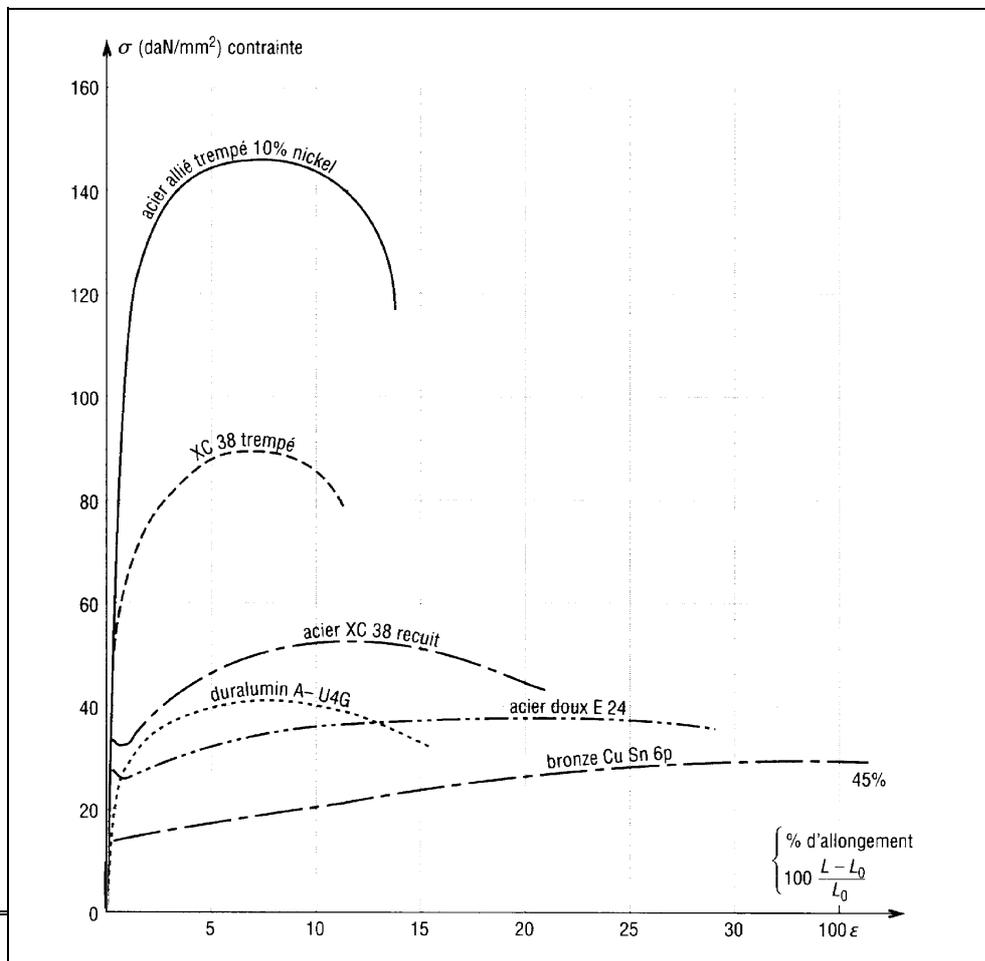
C'est la contrainte maximale que peut supporter le matériau avant d'atteindre la zone de striction. Utilisé dans le calcul des organes de sécurité. Souvent appelée résistance à la rupture.

3.1.9 Phénomène d'écrouissage

Surtout employé en compression, il permet d'augmenter la limite élastique Re sans modifier la résistance à la rupture Rr . Dans un premier temps le matériau est déformé plastiquement avant point de striction, chemin OB. Au relâchement le "déchargement" se fait suivant la droite BO' parallèle à OA. Après remise en charge, la nouvelle courbe caractéristique du matériau est devenu O'BC avec Re_{eb} comme nouvelle limite élastique

3.1.10 Courbes de traction de divers matériaux

Voir ci contre



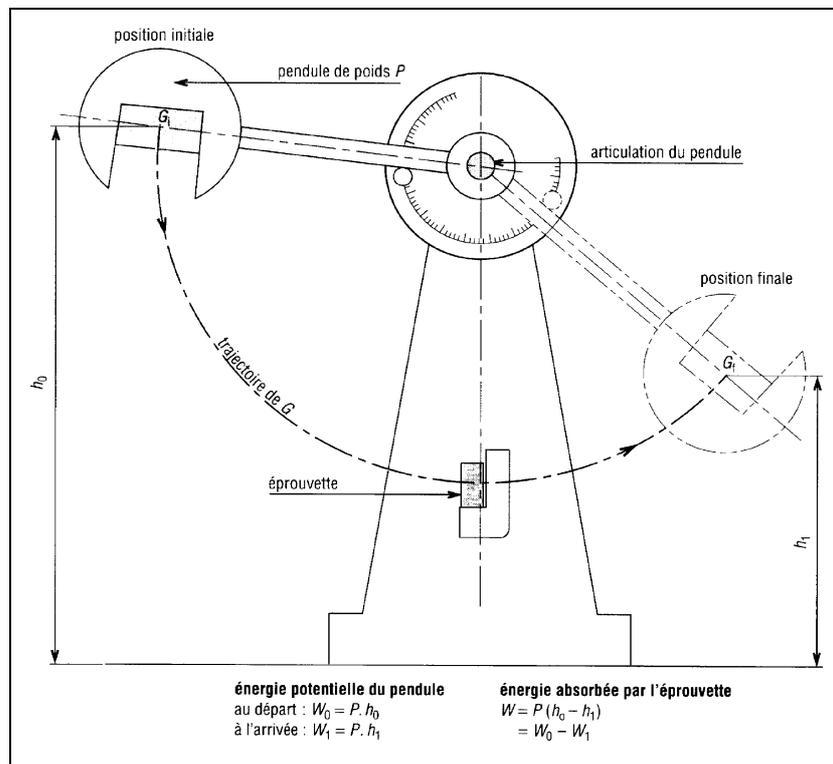
3.2 Essai de résilience

La résilience, de symbole général K , caractérise la capacité d'un matériau à absorber les chocs sans se rompre. Ce risque est amplifié aux basses températures. Elle est mesurée sur des machines du type Charpy (éprouvette sur deux appuis) ou Izod (éprouvette encastrée).

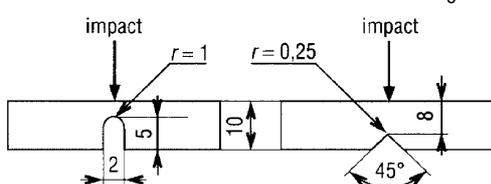
L'essai, qui est un essai **comparatif** entre matériaux, mesure l'énergie qu'il faut fournir à un pendule pesant pour briser une éprouvette entaillée du matériau à tester.

L'énergie absorbée par l'éprouvette (W) est égale à la différence des énergies potentielles du pendule entre le début ($W_0 = P \cdot h_0$) et l'arrivée ($W_1 = P \cdot h_1$);
 $W = P \cdot h_0 - P \cdot h_1 = P (h_0 - h_1)$

La résilience est égale au rapport de W sur l'aire de la section au droit de l'entaille.

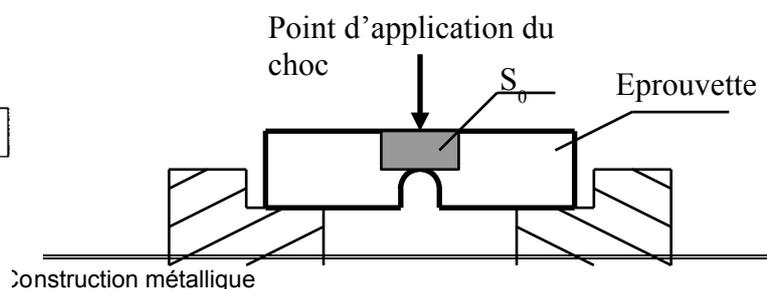


Deux cas : K_{cu} ou $K_{cv} = \frac{W_0 - W_1}{S_0}$



$\left\{ \begin{array}{l} \text{éprouvette en U} \\ \text{symbole } K_{cu} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{éprouvette en V} \\ \text{symbole } K_{cv} \end{array} \right.$



Construction métallique

3.3 Essai de dureté

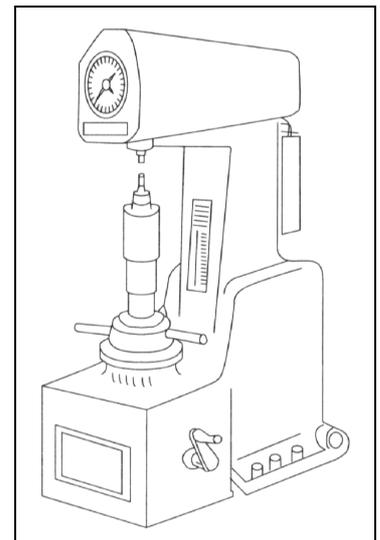
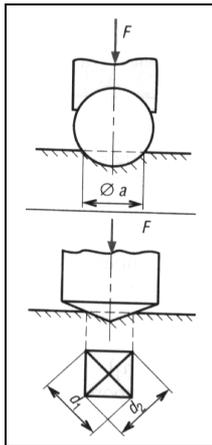
La dureté, de symbole général H, caractérise la capacité d'un matériau à résister au marquage (empreintes, rayures. . .), à l'usure et à l'érosion.

Elle peut être évaluée en mesurant une empreinte laissée en surface par un poinçon agissant sous l'action d'une force connue (essais Brinell, Vickers et Rockwell) mais aussi par une hauteur de rebondissement d'un objet très dur sur la surface à tester (essai Shore pour élastomères et plastiques).

3.3.1 Dureté Brinell (symbole HB)

Elle est obtenue par calcul. Après essai, on mesure l'empreinte laissée par une bille polie (diamètre : 1-2,5-5-10 mm) et la valeur de la charge F appliquée pour obtenir cette empreinte (essai usuel : F = 3 000 daN, d = 10 mm, pendant 15 à 60 secondes). Utilisation : tous métaux.

$$HB = \frac{F}{10\pi \left(5 - \sqrt{25 - \frac{d^2}{4}} \right)}$$



3.3.2 Dureté Vickers (symbole HV)

Elle est obtenue par calcul ; le principe est identique au précédent mais avec une pyramide droite en diamant à base carrée dont l'angle au sommet est de 136°. Utilisation : tous métaux.

$$HV = \frac{0,189 \times F}{d^2} \text{ tel que } d = d_1 + d_2$$

Variante : essai Knoop (microdureté, empreinte en forme de losange, matériaux durs pour petites pièces et pièces à sections fines).

3.3.3 Dureté Rockwell (symbole HR)

C'est l'essai de dureté le plus connu mondialement. Dans ce cas, la dureté, contrairement à Brinell et Vickers, est obtenue par lecture directe d'une longueur d'enfoncement d'un pénétrateur bille acier ou cône diamant

Une précharge (F_0) permet de faire une empreinte initiale et, par-là, d'éliminer les incertitudes propres aux défauts de la surface

3.4 Caractéristiques de quelques matériaux

Aciers d'usage général

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
S 185 (A33)	290	185	190000
S 235 (E24)	340	235	190000
S 275 (E28)	410	275	190000
S 355 (E36)	490	355	190000

Aciers de construction mécanique

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
E 295 (A50)	470	295	200000
E 335 (A60)	570	335	200000
E 360 (A70)	670	360	200000

Aciers pour traitements thermiques

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
C 22 (XC 18)	410 à 980	255 à 600	210000
C 25 (XC 25)	460 à 690	285 à 370	210000
C 35 (XC 38)	570 à 830	335 à 490	210000
C 40 (XC 42)	620 à 880	355 à 520	210000
C 45 (XC 48)	660 à 930	375 à 580	210000
C 50 (XC 50)	700 à 980	395 à 600	210000

Aciers faiblement alliés

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
48 Cr 2 (38 C 2)	600 à 900	350 à 550	210000
100 Cr 6 (100 C6)	850 à 1250	550 à 850	210000
13 Ni Cr 14 (14 NC 11)	800 à 1450	650 à 900	210000
20 Ni Cr Mo 7 (18 NCD 6)	800 à 1500	700 à 900	210000
36 Ni Cr Mo 16 (35 NCD 16)	1000 à 1750	800 à 1250	210000
34 Cr Mo 4 (35 CD 4)	700 à 1200	500 à 850	210000

Aciers fortement alliés

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
---------	----------	----------	---------

X 2 Cr Ni 19.11 (Z3 CN 19-11)	440 à 640	185	
X 6 Cr Ti 18.10 (Z6 CNT 18-10)	490 à 690	205	

4. Exercices :

4.1 Problème de traction

Une diagonale d'une ferme métallique de longueur $L = 4$ m, fabriqué d'une cornière à ailes égales, doit supporter un effort axial de traction $F = 10^5$ N.

Calculer :

1 – La section nécessaire pour que la diagonale résiste en pleine sécurité

2.- Son allongement total ΔL .

Caractéristiques de l'acier : La résistance à la rupture du matériaux est $R = 550$ N/mm²

Module d'élasticité longitudinal : $E = 2 \times 10^5$ N/mm²

Coefficient de sécurité : $s = 5$ par rapport à R

On ne tient pas compte du poids propre du tirant.

SOLUTION :

Données : Charge : $F = 10^5$ N, axiale.

Matériau : $R = 550$ N/mm², $E = 2 \times 10^5$ N/mm²

Coefficient de sécurité : $s = 5$ par rapport à R

1. Calcul du diamètre.

Appliquons l'équation de contrainte : $\sigma = \frac{F}{S}$ d'où $S = \frac{F}{\sigma}$ (1)

F et σ étant constants, S doit l'être également.

On a choisi: $s = 5$ or $s = \frac{R}{\sigma}$ d'où $\sigma = \frac{R}{s} = \frac{550}{5} = 110 \frac{N}{mm^2}$ (2)

De (1) et (2) on tire : $S = \frac{F}{R} \times s$

Application numérique :

Unité F en N ; L en mm ; $F = 10^5$ N, axiale ; $R = 550$ N/mm², $s = 5$

$S = \frac{10^5}{550} \times 5 = 909,1 mm^2$ ou $9,09$ cm². Résulte d'abaque une cornière à aile égales L 70x70x7 avec $S = 9,4$ cm²

2. Calcul de l'allongement.

Appliquons l'équation de déformation: $\Delta l = \frac{N}{S} \times \frac{L}{E}$

Soit ici: $\Delta L = \frac{F}{S_1} \times \frac{L}{E}$ $S_1 = 9,4$ cm² section adoptée.

Module d'élasticité longitudinal : $E = 2 \times 10^5$ N/mm²

Application numérique :

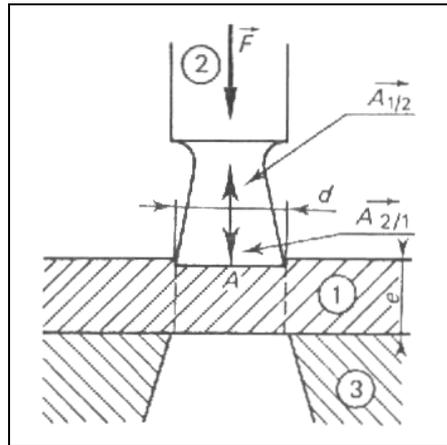
$\Delta L = \frac{F}{S_1} \times \frac{L}{E} = \frac{10^5}{940} \times \frac{4 \times 10^3}{2 \times 10^5} = 2,13$ mm

Contrainte normale réelle:

$$\sigma_{réelle} = \frac{F}{S_1} = \frac{10^5}{940} = 106,4 \frac{N}{mm^2}$$

4.2 Problème de cisailage (poinçonnage)

Pour découper un trou cylindrique de diamètre d dans une tôle [1], on utilise un outil [2] appelé poinçon. La tôle [1] est placée entre le poinçon [2] soumis à l'action F d'une presse et le bâti [3] de celle-ci. Soit à découper une tôle en acier doux, dont la résistance à la rupture au glissement est R_g avec un poinçon (en acier traité très dur) dont la résistance de rupture à la compression est R' . On conçoit que si l'épaisseur e de la tôle à découper dépasse une certaine valeur, le poinçon sera mis hors d'usage, d'où le problème.



1. Établir la relation entre d , e et les caractéristiques des deux matériaux (poinçon et tôle) pour que le poinçon ne soit pas détérioré.

(On prendra un coefficient de sécurité $s = 2,5$ par rapport à R' du poinçon.)

2. Pour un poinçon $d = 30 \text{ mm}$, en acier $R' = 100 \text{ daN/mm}^2$, quelle épaisseur de tôle en acier $R_g = 50 \text{ daN/mm}^2$, peut-on découper?

SOLUTION :

1. Relation entre d , e , R_g et R' .

La section à poinçonner est la surface latérale du cylindre du trou, de diamètre d , soit : πde ; tôle R_g . F étant la force de poinçonnage, on doit donc avoir :

$$F \geq \pi de \times R_g \tag{1}$$

La surface de contact entre poinçon et tôle est : $\frac{\pi d^2}{4}$

Il faut que la pression exercée par la tôle sur le poinçon soit inférieure à $\frac{R'}{s}$, (résistance de celui-ci à la compression R' , divisé par s coefficient de sécurité)

$$\text{Soit : } \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq \frac{R'}{s} \text{ ou } F \leq \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{R'}{s} \tag{2}$$

Éliminons F entre [1] et [2], il vient :

$$\pi d e R_g \leq \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{R'}{s}$$

D'où :
$$e \leq \frac{d R'}{4 s R_g}$$

2. Épaisseur e de tôle à poinçonner. Application numérique (mm, N)

3. Application numérique :
$$e \leq \frac{d R'}{4 s R_g}$$

$d = 30\text{mm}$; $R' = 1000 \text{ N/mm}^2$; $s = 2,5$; $R_g = 500 \text{ N/mm}^2$

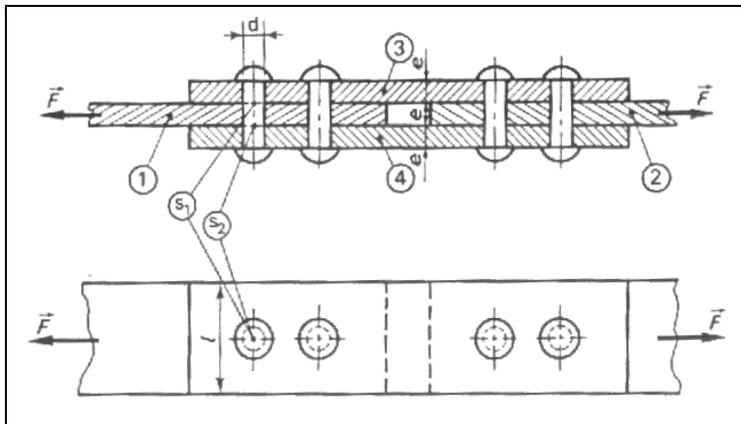
$$e \leq \frac{30 \times 1000}{4 \times 2,5 \times 500} ; e \leq 6\text{mm}$$

Soit : $\frac{e}{d} \leq \frac{6}{30} ; \frac{e}{d} \leq \frac{1}{5}$

REMARQUE En tenant compte du frottement du poinçon sur la tôle, on trouve un rapport $\frac{e}{d}$ plus petit que ce résultat théorique.

4.3 Problème de cisailage des rivets

Deux plaques de tôle [1] et [2], d'épaisseur e , sont raccordées par des couvre-joints [3] et [4] de même épaisseur. La liaison est assurée par des rivets. L'ensemble est soumis à une sollicitation de traction F



Le diamètre d des rivets est défini en fonction de e , par la formule semi-expérimentale:

$$d = \frac{45 \times e}{15 + e} \quad (e \text{ et } d \text{ en mm})$$

Calculer le nombre total n de rivets nécessaires pour assurer la liaison.
On donne la contrainte pratique au cisaillement R_{pg} .

Application numérique :

$$F = 12000 \text{ daN ou } 12 \times 10^4 \text{ N}$$

$$e = 12 \text{ mm}$$

$$R_{pg} = 100 \text{ N/mm}^2.$$

SOLUTION :

$$\text{Diamètre des rivets : } d = \frac{45 \times 12}{15 + 12} = 20 \text{ mm.}$$

En faisant l'isolement de la tôle [1], par exemple, on voit (le frottement étant négligé) qu'il y a $\frac{n}{2}$ rivets sollicités au cisaillement, mais chacun présente deux sections au cisaillement (s_1 et s_2)

L'équation d'équilibre de [1] est donc :

$$F = \frac{n}{2} \times 2 \times \frac{\pi d^2}{4} \times R_{pg}$$

$$\text{D'où } n = \frac{4F}{\pi d^2 R_{pg}}$$

Application numérique (mm et N) :

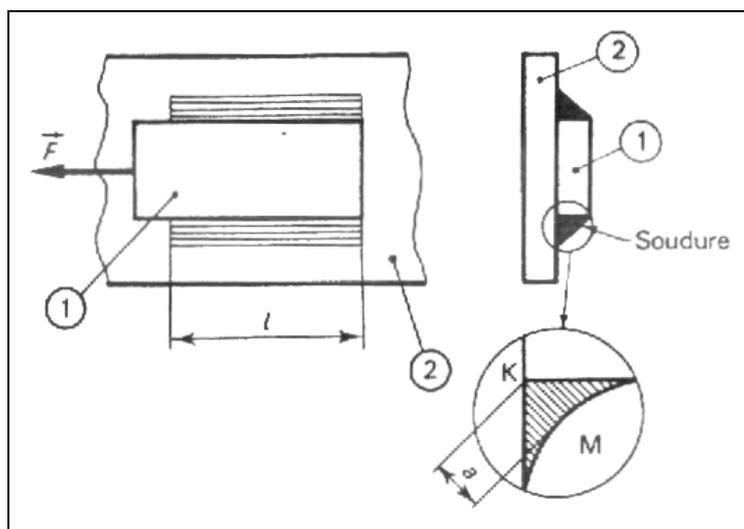
$$n = \frac{4 \times 12 \times 10^4}{\pi \times 20^2 \times 100} = \frac{12}{\pi} \approx 3,82 \quad n = 4 \text{ (plus petit entier pair supérieur)}$$

Nombre pair : parce qu'on calcule $\frac{n}{2}$ avec rivets appliqués à la tôle isolée.

4.4 Problème de cisailage des soudures

Un fer plat de charpente métallique est soudé sur une pièce d'assemblage [2] (gousset) par deux cordons de soudure d'angle.

Déterminer la longueur l à donner aux cordons pour que la liaison entre [1] et [2], soumise à l'action de F , corresponde à la résistance pratique imposée.



Application numérique :

Résistance pratique admise au cisaillement de la soudure

$R_{pg}=0,65 R_e ; R_e =240 \text{ N/mm}^2 ; F=2 \times 10^4 \text{ N}; a =5 \text{ mm}.$

SOLUTION :

L'équilibre du fer plat [1] montre que les deux cordons de soudure sont sollicités au cisaillement suivant la section minimale correspondant à l'épaisseur a, sous l'action de F.

On doit donc avoir :

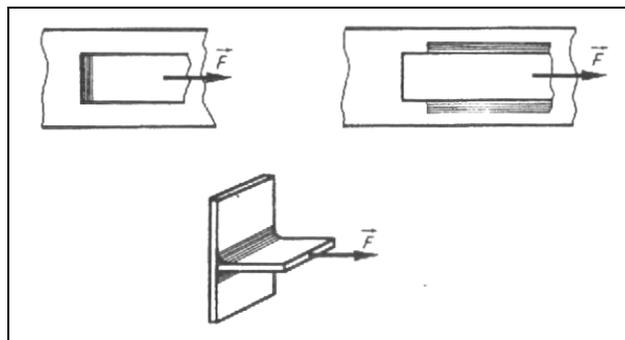
$$l \geq \frac{F}{2a \times 0,65R_e} ; l \geq \frac{F}{1,3 \times a \times R_e}$$

Application numérique (mm, N)

$$l \geq \frac{2 \times 10^4}{1,3 \times 5 \times 240} = 12,82 \text{ mm} \quad l = 13 \text{ mm}$$

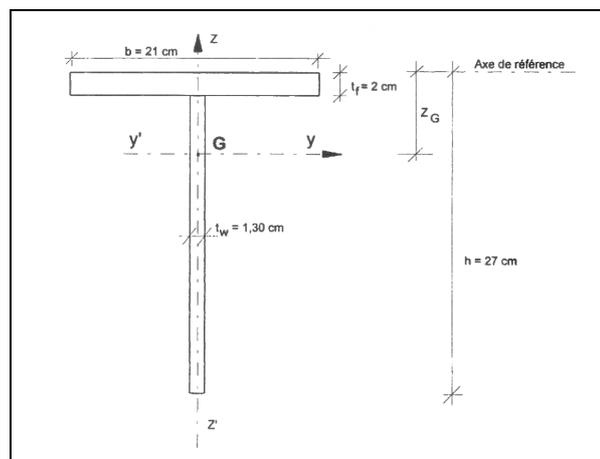
REMARQUE : Des règlements officiels donnent des coefficients correcteurs de sécurité à appliquer en fonction, notamment, de l'épaisseur a du cordon de soudure, de la position du cordon par rapport à la sollicitation

Il faut donc s'y référer pour des calculs relatifs à une construction réelle.



4.5 Problème de calcul des caractéristiques de la section

Pour la section représentée ci-dessous, déterminer:



- a) L'aire A de la section.
- b) La position du centre de gravité.
- c) Les moments d'inertie I_y , et I_z par rapport aux axes principaux.
- d) Les modules de résistance élastique $W_{el,y}$ et $W_{el,z}$
- e) Les rayons de giration i_y et i_z .

SOLUTION :

a) Aire de la section

$$A = b \times t_f + (h - t_f) \times t_w = 21,0 \times 2,0 + (27,0 - 2,0) \times 1,30 = 74,50 \text{ cm}^2$$

b) Position du centre de gravité

Le centre de gravité G est situé sur l'axe de symétrie zz' . Pour déterminer sa position sur cet axe, nous allons calculer le moment statique S_0 de la section complète par rapport à l'axe de référence passant par le bord extérieur de la semelle.

	Aire A (cm ²)	Bras de levier (cm)	Moment statique (cm ³)
Semelle	21,0 × 2,0	$\frac{2,0}{2}$	42,0
Ame	(27,0 - 2,0) × 1,30	$2,0 + \left(\frac{27,0 - 2,0}{2}\right)$	471,25
Total	74,50		S₀ = 513,25

La distance Z_G entre le centre de gravité et l'axe de référence est donnée par:

$$Z_G = \frac{S_0}{A} = \frac{513,25}{74,5} = 6,89 \text{ cm}$$

c) Moment d'inertie I_y ,

$$I_Y = \sum I_{propre} + \sum Ad^2$$

	I propre (cm ⁴)	Ad ² (cm ⁴)	I _y (cm ⁴)
Semelle	$\frac{21,0 \times 2,0^3}{12}$	$2,0 \times 21,0 \times \left(6,89 - \frac{2,0}{2}\right)^2$	1 471,1
Ame	$\frac{(27,0 - 2,0)^3 \times 1,30}{12}$	$(27,0 - 2,0) \times 1,30 \times \left[2,0 + \left(\frac{27,0 - 2,0}{2}\right) - 6,89\right]^2$	3 574,9
Total			5 046

Moment d'inertie I_z

	I propre (cm ⁴)	Ad ² (cm ⁴)	I _z (cm ⁴)
Semelle	$\frac{21,0^3 \times 2,0}{12}$	0	1 543,50
Ame	$\frac{1,30^3 \times (27,0 - 2,0)}{12}$	0	4,58
Total			1 548

Les inerties par rapport aux axes principaux ont donc pour valeurs:

$$I_y = 5046 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 1548 \text{ cm}^4$$

d) Modules de résistance élastique

axe y:

$$v_1 = Z_G = 6,89 \text{ cm}$$

$$v_2 = h - Z_G = 27,0 - 6,89 = 20,11 \text{ cm}$$

$$W_{el,y1} = \frac{I_y}{v_1} = \frac{5046}{6,89} = 732,4 \text{ cm}^3$$

$$W_{el,y2} = \frac{I_y}{v_2} = \frac{5046}{20,11} = 250,9 \text{ cm}^3$$

Le module de résistance élastique $W_{el,y}$ est égal à la plus faible de ces deux valeurs, donc: $W_{el,y} = 250,9 \text{ cm}^3$.

axe z: $v_3 = \frac{21,0}{2} = 10,5 \text{ cm}$

$$W_{el,z} = \frac{I_z}{v_3} = \frac{1548}{10,5} = 147,5 \text{ cm}^3$$

e) Rayons de giration

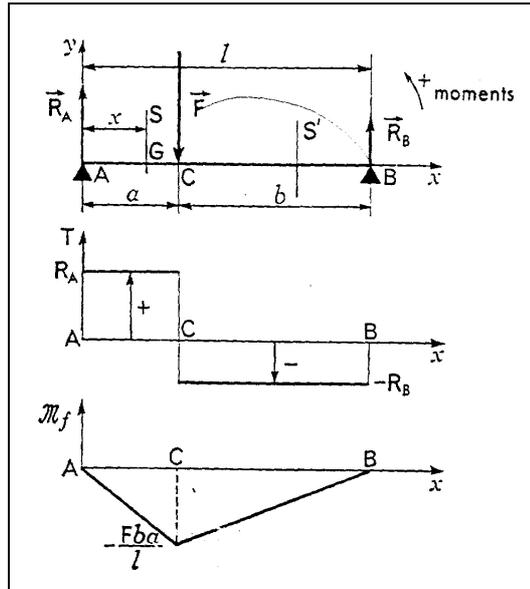
axe y: $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{5046}{74,5}} = 8,23 \text{ cm}$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{1548}{74,5}} = 4,56 \text{ cm}$$

4.6 Problème de flexion. Poutres sur deux appuis de niveau. Charges localisées.

Pour le schéma statique ci-dessous :

- Calculer les réactions aux appuis
- Tracer le diagramme d'effort tranchant
- Rechercher la valeur maximale du moment de flexion



Les forces appliquées à la poutre sont :

- Son poids. (négligé),
- F connue,
- R_A , et R_B d'intensités inconnues.

Pour calculer les réactions d'appui il suffit d'écrire les équations d'équilibre :

$$\rightarrow F + R_A + R_B = 0$$

soit, par projection sur Ay : $- F + R_A + R_B = 0$

En exprimant les moments en A et en projetant sur Az ($Azyz$ trirectangle direct), la deuxième condition d'équilibre donne :

$$-Fa + R_B l = 0$$

Soit : $R_B = \frac{F \times a}{l}$

puis $R_A = \frac{F \times b}{l}$ en exprimant les moments en B



Diagramme des T :

La force F sépare la poutre en deux régions AC et CB.

Entre A et C (section S) : $T = R_A$

Entre C et B (section S') : $T = R_A - F = - R_B$. La variation de T est représentée par le diagramme d'effort tranchant. En C il y a discontinuité pour T .

Diagramme des M_f :

Entre A et C : $M_f = R_A x$

En A, $M_f = 0$

En C, $M_f = \frac{-F \times b}{l} \times a$

Entre C et B : $M_f = -R_A x + F(x-a)$

$$M_f = x(F - R_A) - Fa = x R_B - Fa = \frac{F \times a}{l} \times x - Fa$$

enB : $M_f = 0$.

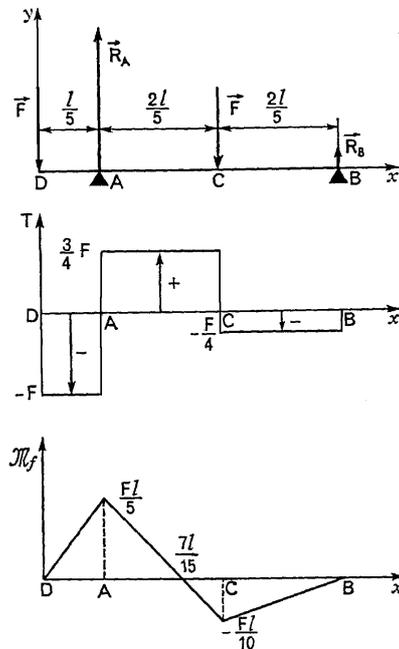
La variation de M_f est représentée par le diagramme de moments fléchissant.

Remarquons que $M_{f \max} = \frac{-F \times b}{l} \times a$

4.7 Problème de flexion. Poutre avec porte à faux. Charges localisées.

Pour le schéma statique ci-dessous :

- Calculer les réactions aux appuis
- Tracer le diagramme d'effort tranchant
- Rechercher la valeur maximale du moment de flexion



Les forces appliquées à la poutre sont :

- Son poids. (négligé),
- F connue,
- R_A , et R_B d'intensités inconnues.

Pour calculer les réactions d'appui il suffit d'écrire les équations d'équilibre :

$$\rightarrow 2F + R_A + R_B = 0$$

soit, par projection sur Dy : $-2F + R_A + R_B = 0$.

En exprimant les moments en A et en projetant sur Az ($Axyz$ trirectangle direct), la deuxième condition d'équilibre donne :

$$F \times \frac{l}{5} - F \times \frac{2l}{5} + R_B \times \frac{4l}{5} = 0$$

$$\text{Soit : } R_B = \frac{F}{4}$$

$$\text{puis } F \times l - R_A \times \frac{4l}{5} + F \times \frac{2l}{5} = 0$$

$$R_A = \frac{7 \times F}{4} \text{ en exprimant les moments en B}$$

Diagramme des T

Entre D et A : $T = -F$

$$\text{Entre A et C : } T = -F + R_A = \frac{3F}{4}$$

$$\text{Entre C et B : } T = -F + R_A - F = -\frac{F}{4}$$

Diagramme des M_f .

Entre D et A : $M_f = Fx$

$$\text{En A : } M_f = \frac{Fl}{5}$$

$$\text{Entre A et C : } M_f = Fx - R_A \times \left(x - \frac{l}{5}\right) = (F - R_A)x + R_A \frac{l}{5}$$

$$M_f = -\frac{3}{4}Fx + \frac{7Fl}{20}$$

$$\text{En C : } M_f = -\frac{Fl}{10} \text{ par ailleurs, } M_f = 0 \text{ pour } x = \frac{7l}{15}$$

$$\text{Entre C et B } M_f = Fx - R_A \times \left(x - \frac{l}{5}\right) + F \left(x - \frac{3l}{5}\right)$$

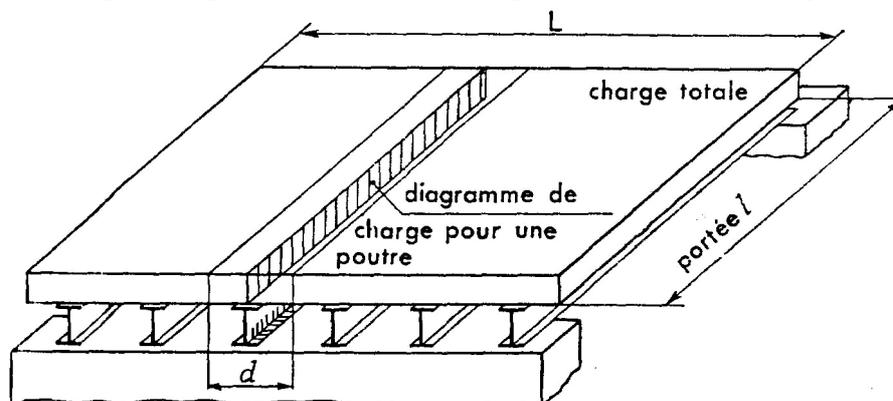
$$\text{soit, après réduction : } M_f = \frac{F}{4}x - \frac{Fl}{4}$$

En B : $M_f = 0$.

Charges réparties. - Préliminaire. - Comme exemples de charges réparties, on peut citer : le poids propre des poutres, les charges généralement supportées par un tablier de pont, un plancher, une toiture, la caisse d'un véhicule.

Mise en évidence de la charge unitaire q (N/m).

Dans l'exemple représenté par la figure ci-dessous, la charge est uniformément répartie sur six poutres



parallèles (profilés en I). Si p est le poids unitaire de la charge en N/m^2 , la charge totale a pour expression

$$F = pLl.$$

La charge supportée par une poutre est alors $Q = pdl$, ce qui permet de mettre en évidence une charge unitaire ou taux de charge :

$$q = Q/l \text{ en N /m}$$

Le diagramme de cette charge uniforme est représenté sur la figure ci-dessous

4.8 Problème de flexion. Poutre sur deux appuis de niveau. Charge uniformément répartie.

Pour le schéma statique ci-dessous :

- Calculer les réactions aux appuis
- Tracer le diagramme d'effort tranchant
- Rechercher la valeur maximale du moment de flexion

Les forces appliquées à la poutre sont :

- Son poids. (négligé),
- P connue, $P = ql$ (q, poids unitaire en N /m)
- R_A , et R_B d'intensités inconnues.

Pour calculer les réactions d'appui il suffit d'écrire les équations d'équilibre :

$$\begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ P + R_A + R_B = 0 \end{matrix}$$

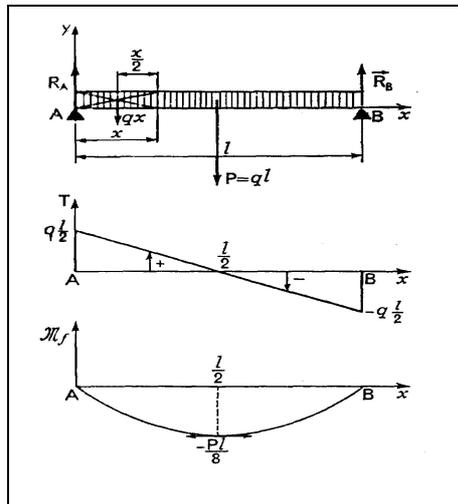
soit, par projection sur Ay : $- P + R_A + R_B = 0.$

Actions de contact en A et B.

- Par symétrie $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$

Diagramme des T :

Entre A et B : $T = R_A - qx$ ou $T = \frac{ql}{2} - qx$



La variation de T est du premier degré figure ci-dessus et $T = 0$ pour $x = l/2$

Diagramme des M_f

Entre A et B $M_f = - R_A x + \frac{q \times x \times x}{2} = - \frac{q \times l}{2} \times x + \frac{q \times x^2}{2}$

La variation de M_f est du deuxième degré (arc de parabole représenté par la troisième partie de la figure ci-dessus).

$$\text{Pour } x = \frac{l}{2} : M_{fmax} = -\frac{P \times l}{8} = -\frac{q \times l^2}{8}$$

4.9 Problème de flexion. Poutres encastrées à une extrémité.

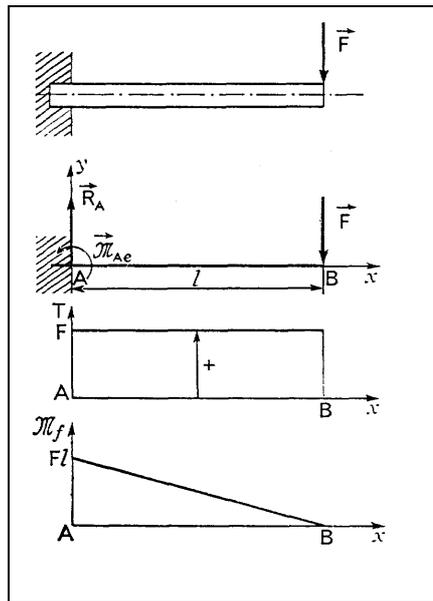
Pour le schéma statique ci-dessous :

- Calculer les réactions aux appuis
- Tracer le diagramme d'effort tranchant
- Rechercher la valeur maximale du moment de flexion

Les forces appliquées à la poutre sont :

- Son poids. (négligé),
- F connue
- R_A , et M_A d'intensités inconnues.

- a) Charges localisées :



Actions de l'encastrement :

- Équilibre de la poutre (poids négligé)
- la condition $\sum F_{ext} = 0$ donne, par projection sur Ay:
 $-F + R_A = 0$ ou $R_A = F$
- la condition $\sum \vec{M}_A = 0$ donne, par projection sur Az.
 $-Fl + M_{AZ(enc)} = 0$

Diagramme des T

Entre A et B : $T = R_A = F$.

Diagramme des M_f :

$$M_f = M_{enc.} - Fx$$

$$M_f = Fl - Fx$$

$$M_f = Fl$$

b) Charges réparties uniformément.

Les forces appliquées à la poutre sont :

- Son poids. (négligé),
- Q connue, $Q = ql$ (q, poids unitaire en N /m)
- R_A , et M_A d'intensités inconnues.

Actions de l'encastrement

$$R_A = ql$$

$$M_{Aze} = ql^2/2$$

Diagramme des T. : - Entre A et B : $T = R_A - qx = ql - qx$.

Diagramme des Mf :

$$M_f = ql^2/2 - R_A x + qx^2/2 = qx^2/2 - qlx + ql^2/2$$

La valeur maximale est obtenue pour $x=0$;

$$M_f = ql^2/2$$

